

Aplikace kybernetiky ve strojírenství

3. Možnosti popisu dynamického systému, část 2

Ing. Jan Jakl, Ph.D.

Podpořeno v rámci projektu CZ.1.07/2.2.00/15.0383
Inovace studijního oboru Dopravní a manipulační technika
s ohledem na potřeby trhu práce



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Metody vnějšího popisu

Popis statických vlastností systému – popis vlastností systému v ustáleném stavu

- *Statická charakteristika*
- *Statické zesílení*

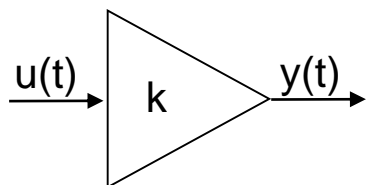
Popis dynamických vlastností systému

- *Diferenciální rovnice*
- *Přechodová funkce, přechodová charakteristika*
- *Impulsní funkce, impulsní charakteristika*
- *Obrazový přenos*
- *Póly a nuly systému, časové konstanty*
- *Frekvenční přenos*
- *Frekvenční charakteristika*

Elementární systémy

Elementární dynamické soustavy – subsystémy

Proporcionální člen



$$y(t) = k \cdot u(t)$$

Obrazový přenos:

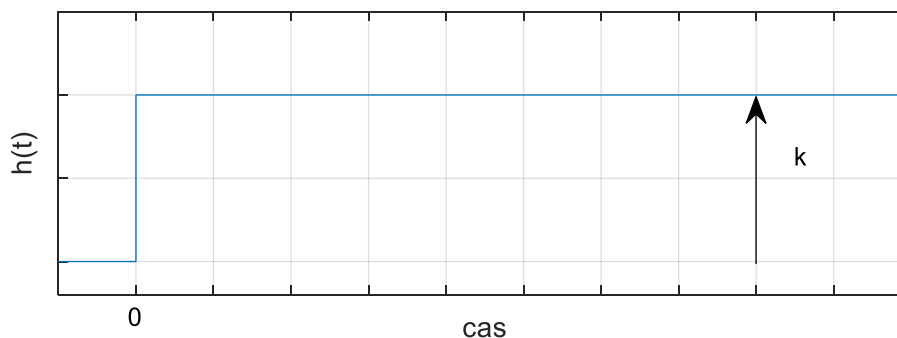
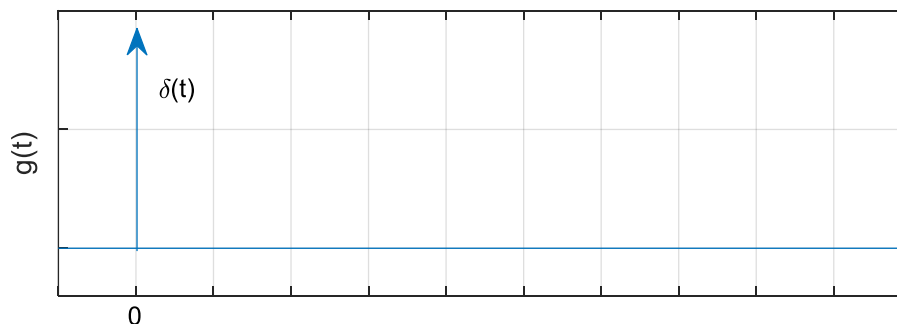
$$F_s(p) = k$$

Impulsní funkce:

$$g(t) = \delta(t)$$

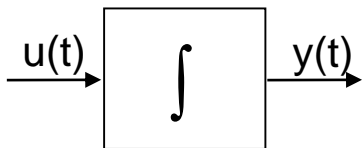
Přechodová funkce:

$$h(t) = k$$



Elementární subsystemy

Integrační člen



$$y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$$

Obrazový přenos:

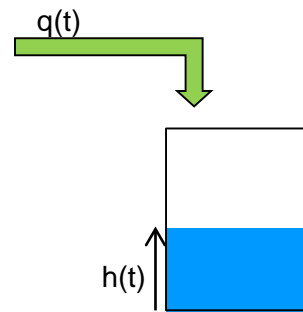
$$F_s(p) = \frac{1}{p}$$

Impulsní funkce:

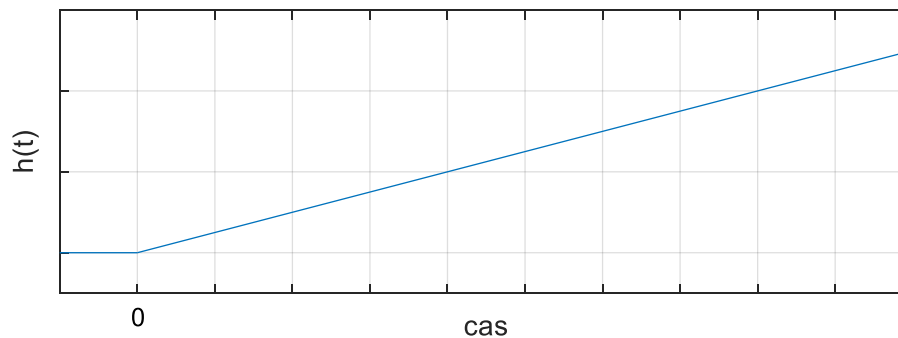
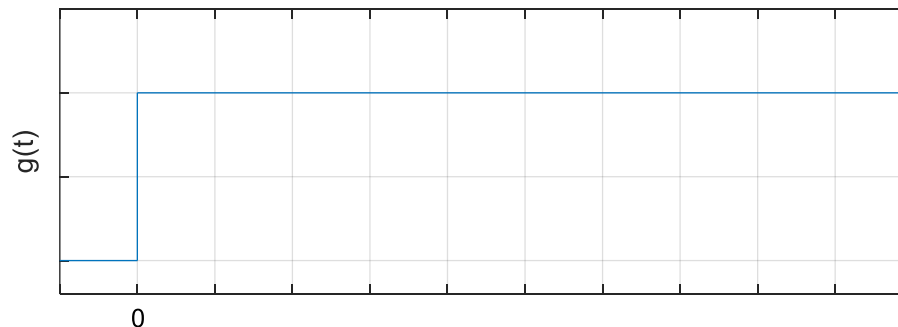
$$g(t) = 1[t]$$

Přechodová funkce:

$$h(t) = t$$

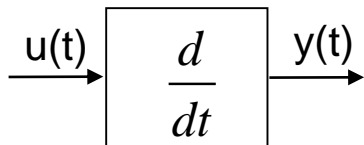


$$h(t) = \frac{1}{S} \int_0^t q(\tau) d\tau$$



Elementární subsystemy

Derivační člen



$$y(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

Obrazový přenos:

$$F_s(p) = p$$

Impulsní funkce:

$$g(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$$

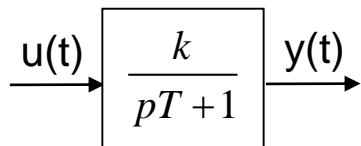
Přechodová funkce:

$$h(t) = \delta(t)$$



Elementární subsystemy

Aperiodický člen 1. řádu



T – časová konstanta systému

k – statické zesílení

$$T \cdot \dot{y}(t) + y(t) = k \cdot u(t)$$

Obrazový přenos:

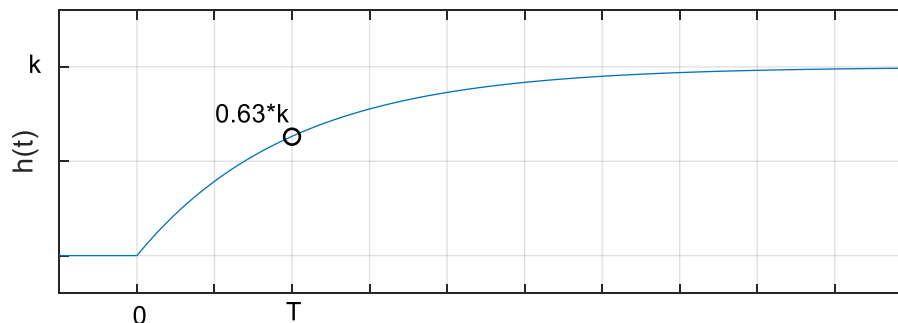
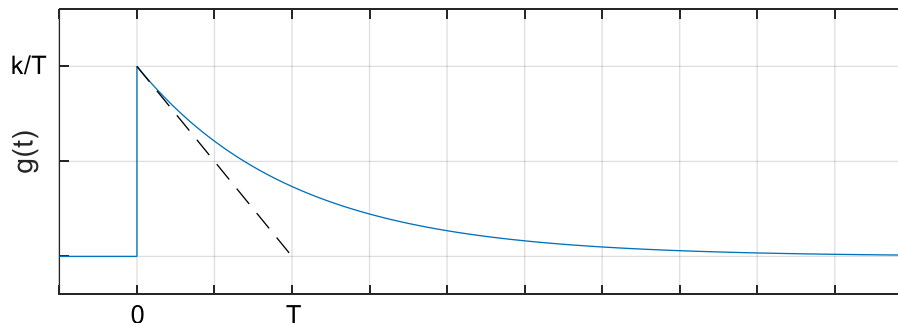
$$F_s(p) = \frac{k}{p \cdot T + 1} = \frac{k}{T \cdot \left(p + \frac{1}{T}\right)}$$

Impulsní funkce:

$$g(t) = \frac{k}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

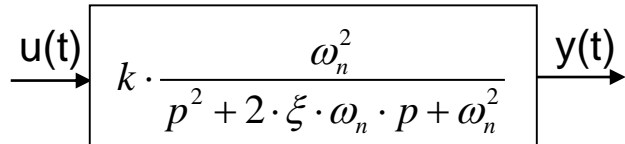
Přechodová funkce:

$$h(t) = k \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$



Elementární subsystémy

Kmitavý člen 2. řádu



$$\ddot{y}(t) + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot \dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = k \cdot \omega_n^2 \cdot u(t)$$

ω_n – přirozená frekvence netlumeného systému

ξ – činitel tlumení, $\xi \in \langle 0, 1 \rangle$

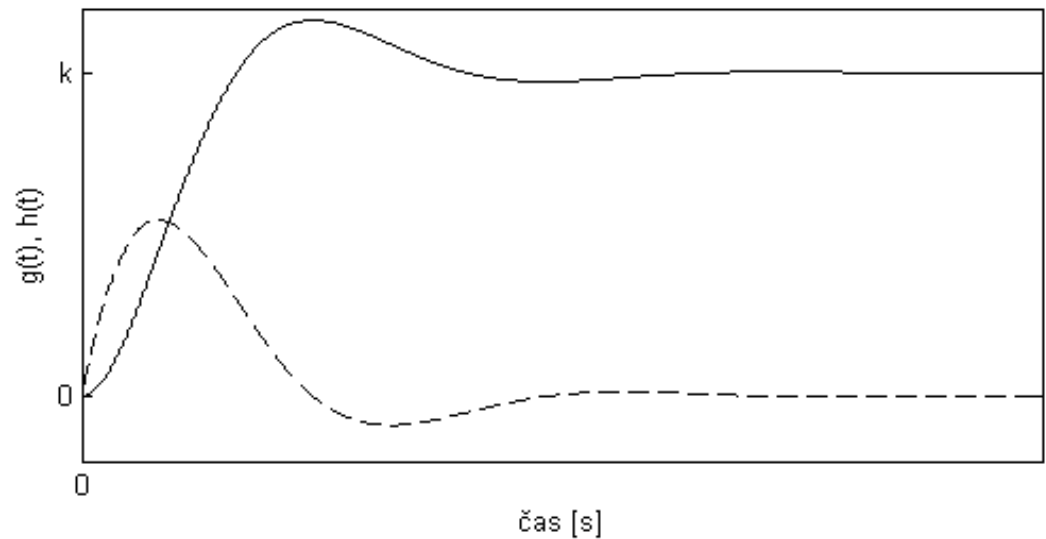
$\xi \geq 1$ - nejedná se o kmitavý systém

Obrazový přenos:

$$F_s(p) = \frac{k \cdot \omega_n^2}{p^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot p + \omega_n^2}$$

Póly systému

$$p_{1,2} = -\xi \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$



Elementární subsystémy

Standardně uváděný tvar pohybové rovnice

$$m \cdot \ddot{y}(t) + b \cdot \dot{y}(t) + k \cdot y(t) = u(t)$$

$$\ddot{y}(t) + \frac{b}{m} \cdot \dot{y}(t) + \frac{k}{m} \cdot y(t) = \frac{u(t)}{m}$$

Zápis s ξ a ω_n :

$$\ddot{y}(t) + 2 \cdot \xi \cdot \omega_n \cdot \dot{y}(t) + \omega_n^2 \cdot y(t) = u(t)$$

Z porovnání obou tvarů LDR plyne:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\xi = \frac{b}{2 \cdot m \cdot \omega_n}$$



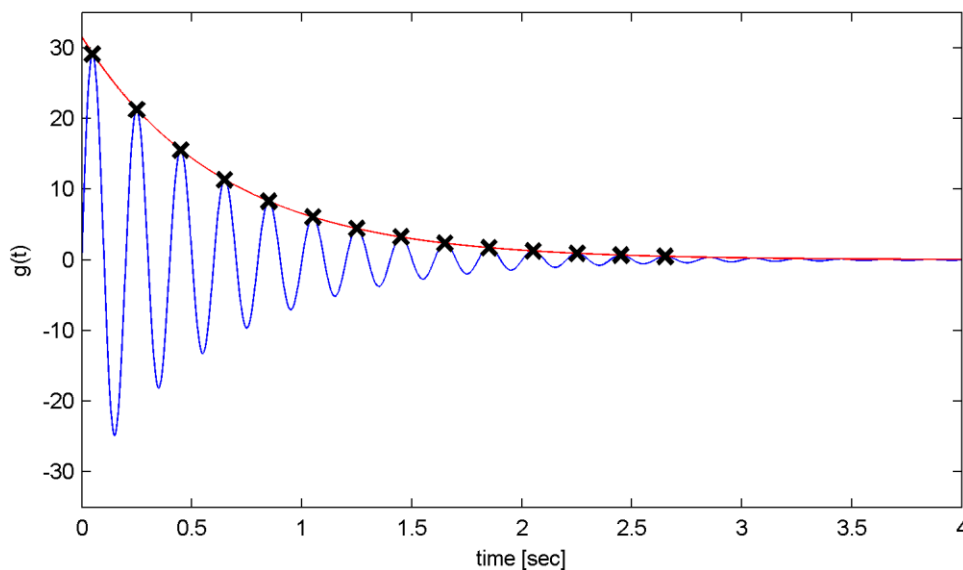
$$\xi = \frac{b}{2 \cdot \sqrt{k \cdot m}}$$

Elementární subsystémy

Kmitavý člen 2. řádu

Impulsní funkce: $g(t) = \frac{k \cdot \omega_n}{1 - \xi^2} \cdot e^{-\xi \omega_n t} \cdot \sin(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cdot t)$

harmonická funkce tlumená
exponenciální funkcí



logaritmický dekrement poměrného útlumu

$$\delta = \ln \left(\frac{A_i}{A_{i+1}} \right) \quad A_i - i\text{-té lokální maximum } g(t)$$

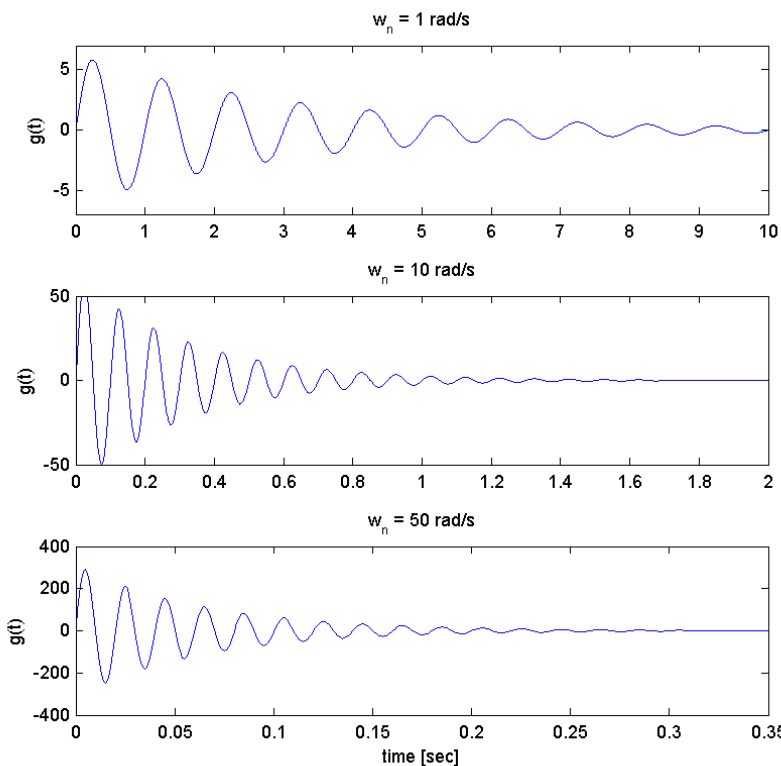
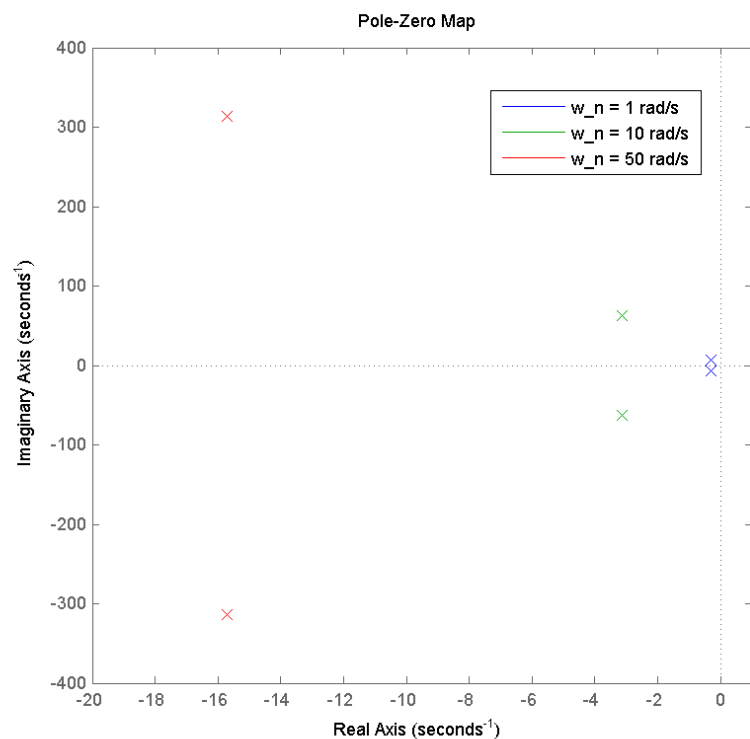
poměrný útlum

$$b = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi + \delta^2}}$$

Elementární subsystémy

Vliv polohy pólů systému na průběh impulsní charakteristiky

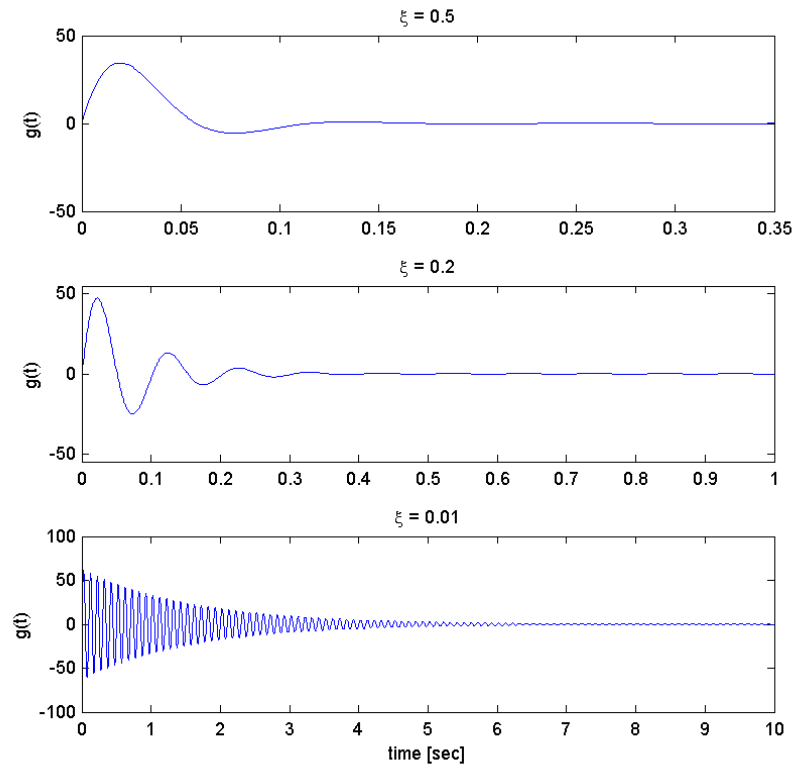
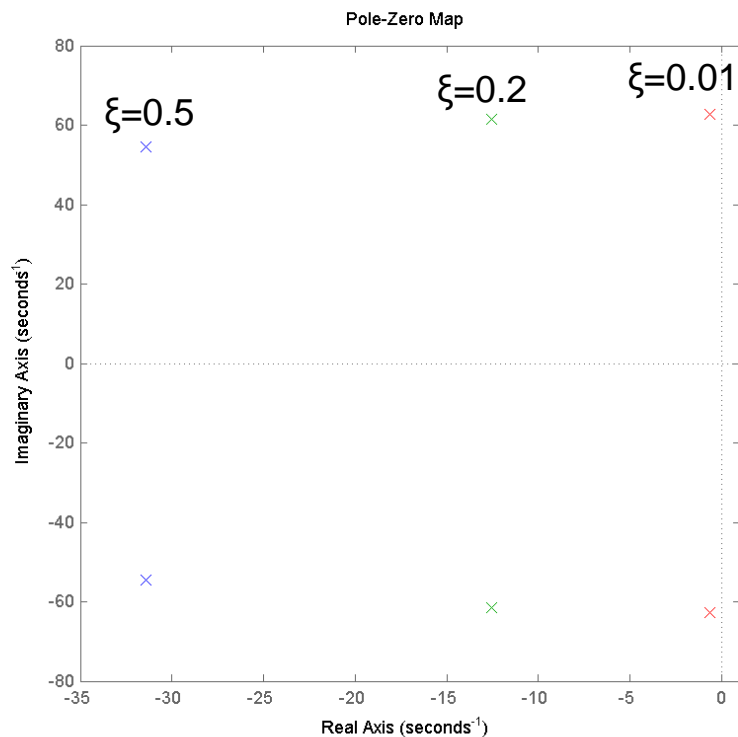
Konstantní činitel tlumení:



Elementární subsystémy

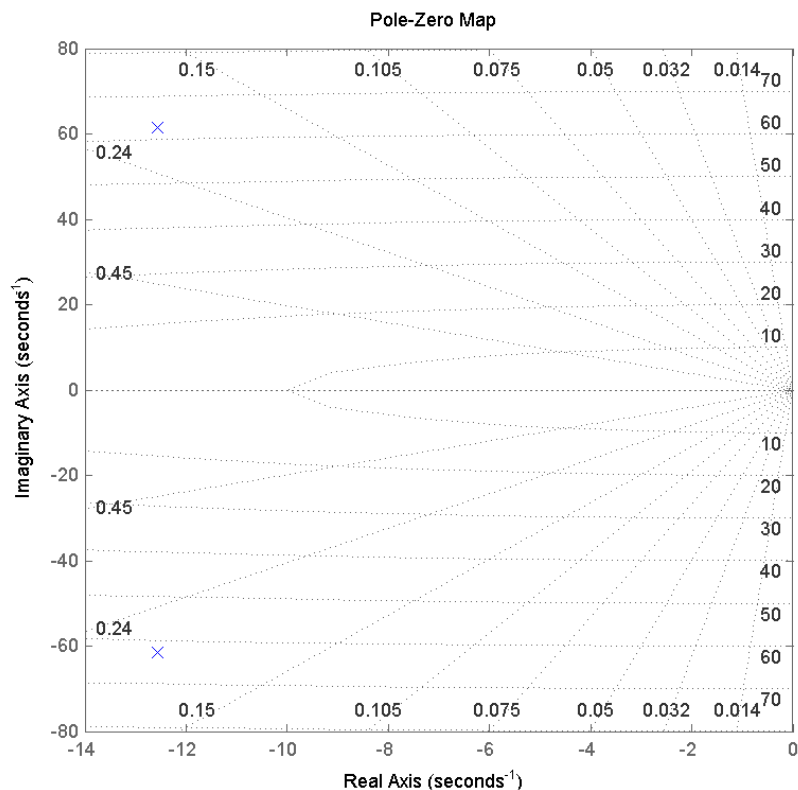
Vliv polohy pólů systému na průběh impulsní charakteristiky

Konstantní ω_n :



Elementární subsystémy

Vliv ω_n a ξ na polohu pólů systému



Křivky udávají závislost polohy pólů systému v komplexní rovině pro konstantní hodnoty činitele tlumení a přirozené frekvence netlumeného systému.

Elementární subsystémy

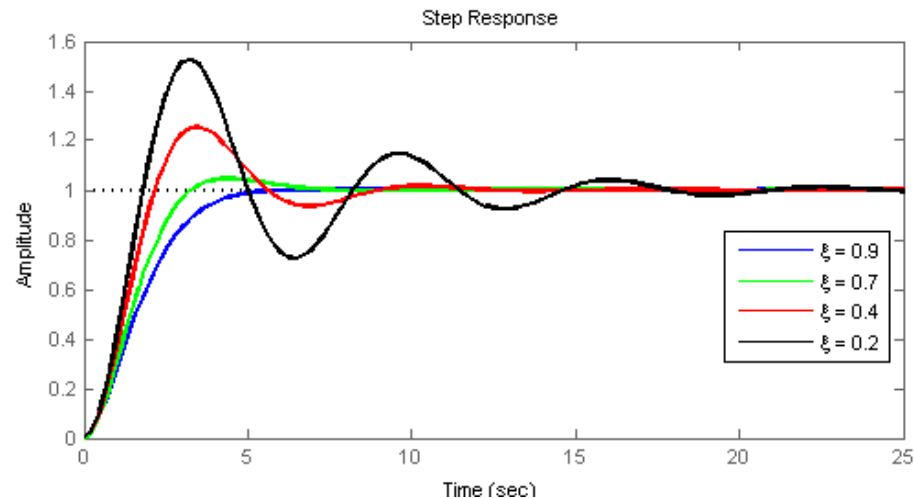
Impulsní a přechodová funkce kmitavého systému 2. řádu:

$$g(t) = \frac{k \cdot \omega_n}{1 - \xi^2} \cdot e^{-\xi \omega_n t} \cdot \sin\left(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cdot t\right)$$

$$h(t) = k - \frac{k \cdot \xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot e^{-\xi \omega_n t} \cdot \sin\left(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cdot t\right) - k \cdot e^{-\xi \omega_n t} \cdot \cos\left(\omega_n \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cdot t\right)$$

Vliv činitele tlumení na průběh přechodové charakteristiky:

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 2\xi p + 1}$$



Elementární subsystémy

Z průběhů přechodových charakteristik systémů 1. a 2. řádu je zřejmé, že se odezva stabilního LDS

na 1[t] skládá ze dvou částí:

$$y(t) = y_p(t) + y_v(t)$$

přirozená složka odezvy
závislá na dynamice systému
odpovídá homogennímu řešení LDR

vynucená složka odezvy
závislá na vstupním signálu
odpovídá partikulárnímu řešení
nehomogenní rovnice

Například pro aperiodický člen 1. řádu:

$$h(t) = k \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) = -ke^{-\frac{t}{T}} + k$$

přirozená složka odezvy – pro
stabilní systém konverguje k 0.

statické zesílení * 1[t]

Pokud je LDS stabilní, pak v ustáleném stavu je odezva systému dána pouze vynucenou složkou odezvy.

Frekvenční odezva LDS

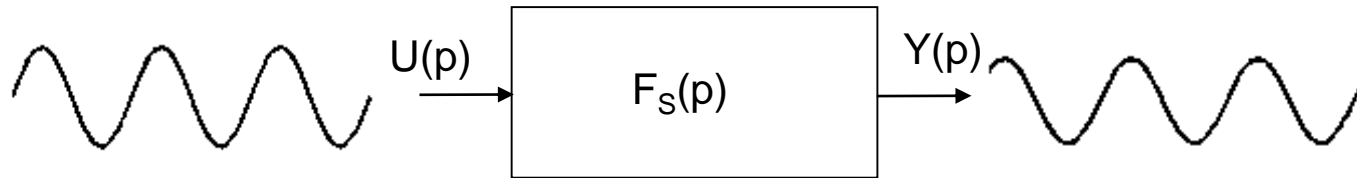
Motivace pro studium frekvenčních vlastností dynamických systémů



Frekvenční odezva LDS

Frekvenční odezva LDS

Odezva systému na harmonický signál:



Pokud na vstup LDS přivedeme harmonický signál $u(t) = A_u \sin(\omega t)$, pak lze vynucenou složku odezvy systému zapsat ve tvaru $y(t) = A_y \sin(\omega t + \varphi(\omega))$.

Výstupní signál tedy

- je **harmonický**
- má **stejnou frekvenci** jako vstupní signál
- má **jinou amplitudu** a je **fázově posunut** oproti vstupnímu signálu

Frekvenční odezva LDS

Frekvenční přenos

Analogicky jako byl s využitím Laplaceovy transformace zaveden obrazový přenos je s využitím Fourierovy transformace definován frekvenční přenos:

$$F(j\omega) = \left. \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \right|_{n.p.p.}$$

kde $Y(j\omega)$, resp. $U(j\omega)$ je Fourierův obraz funkce $y(t)$, resp. $u(t)$. Fourierova transformace je pro kauzální systémy ($y(t) = 0$, pro $t < 0$) formálně shodná s Laplaceovou transformací pro $p = j\omega$.

Fourierova transformace

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Pozn: Kromě analýzy vlastností LDS ve frekvenční oblasti má Fourierova transformace velký význam také v oblasti zpracování signálů. Více se o této problematice dozvíte v přednášce č. 7.

Frekvenční odezva LDS

Frekvenční přenosy elementárních dynamických členů

Proporcionální člen

$$F(j\omega) = K$$

Integrátor

$$F(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j \frac{1}{\omega}$$

Derivátor

$$F(j\omega) = j\omega$$

Aperiodický člen 1. řádu

$$F(j\omega) = \frac{k}{j\omega T + 1} = \frac{k(1 - j\omega T)}{1 + \omega^2 T^2}$$

Kmitavý člen 2. řádu

$$F(j\omega) = \frac{k\omega_n^2}{(j\omega)^2 + j2\xi\omega_n\omega + \omega_n^2} = \frac{k\omega_n^2 \left[(\omega_n^2 - \omega^2) - j2\xi\omega_n\omega \right]}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2}$$

Frekvenční odezva LDS

Frekvenční přenos je komplexní funkcí ω můžeme jej tedy zapsat ve tvaru:

$$F(j\omega) = \operatorname{Re}[F(j\omega)] + j \operatorname{Im}[F(j\omega)] = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

$|F(j\omega)|$ – amplitudové zesílení, udává poměr amplitudy na výstupu systému ku amplitudě buzení

$\varphi(\omega)$ – fázový posun, udává jaké bude fázové zpoždění (předstih) výstupního signálu oproti vstupnímu signálu.

Pro konkrétní ω je $F(j\omega)$ fázor.

Fázorová reprezentace frekvenčního přenosu

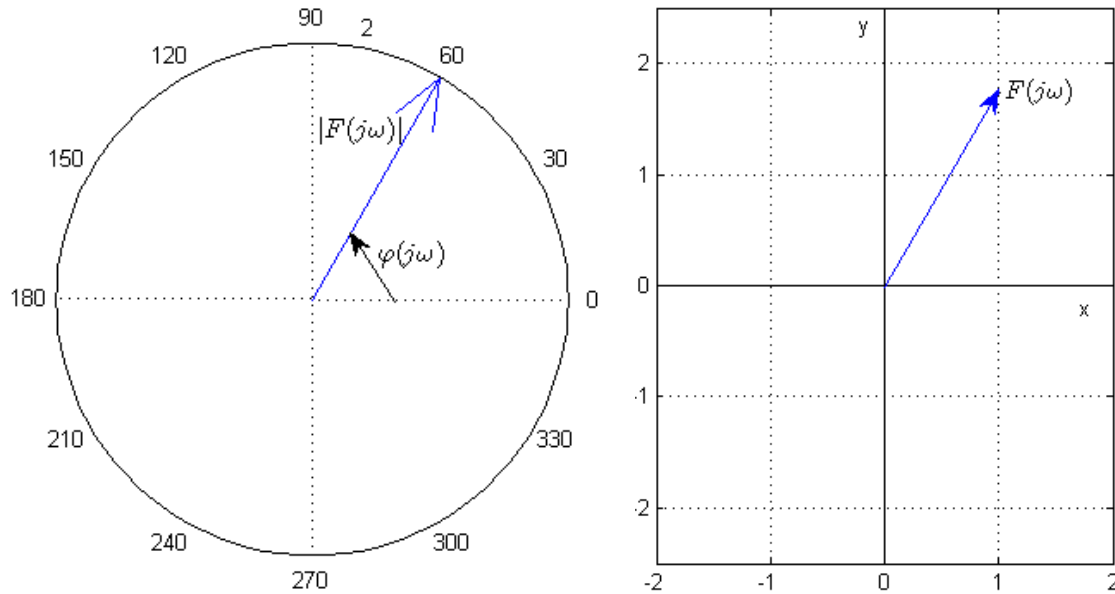
Komplexní funkce $F(j\omega)$ je pro dané ω parametrizována dvojicí $(|F(j\omega)|, \varphi(\omega))$.

Grafické znázornění fázoru:

- v polárních souřadnicích je vzdálenost bodu $F(j\omega)$ od počátku soustavy souřadnic rovna $|F(j\omega)|$ a úhel, který svírá úsečka spojující bod $F(j\omega)$ a počátek s osou x je roven $\varphi(\omega)$.
- v kartézských souřadnicích s osami x a y jsou souřadnice bodu $F(j\omega)$

$$[|F(j\omega)| \cos(\varphi(\omega)), |F(j\omega)| \sin(\varphi(\omega))]$$

Frekvenční odezva LDS



Grafické znázornění vývoje amplitudového zesílení a fázového posunu v závislosti na frekvenci se nazývá **frekvenční charakteristika**. Podobně jako u přechodové a impulsní charakteristiky máme dvě možnosti pro její určení:

- analytickým výpočtem
pro konkrétní ω_k platí
$$|F(j\omega_k)| = \sqrt{\operatorname{Re}[F(j\omega_k)]^2 + \operatorname{Im}[F(j\omega_k)]^2}$$
$$\varphi(\omega_k) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}[F(j\omega_k)]}{\operatorname{Re}[F(j\omega_k)]}$$

Frekvenční odezva LDS

- měřením

na vstup systému přivedeme harmonický signál se známou amplitudou, frekvencí a počáteční fází a určíme amplitudu a fázový posun výstupního signálu.

$$|F(j\omega_k)| = \frac{A_y(\omega_k)}{A_x}$$

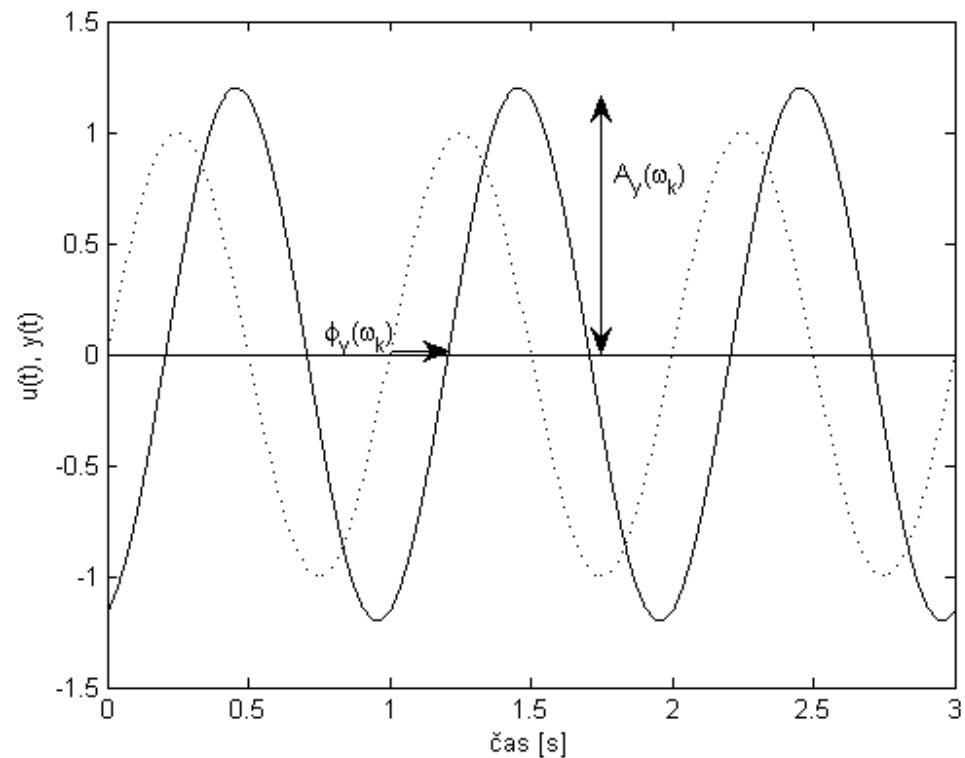
$$\varphi(\omega_k) = \varphi_y(\omega_k) - \varphi_x$$

úloha se zjednoduší
pokud

$$A_x = 1, \varphi_x = 0^\circ$$

Často používané vstupy systému při měření frekvenční charakteristiky:

- Impuls – například pomocí kladívka
- Harmonický signál s rostoucí frekvencí – např. lineární sweep
- Šum



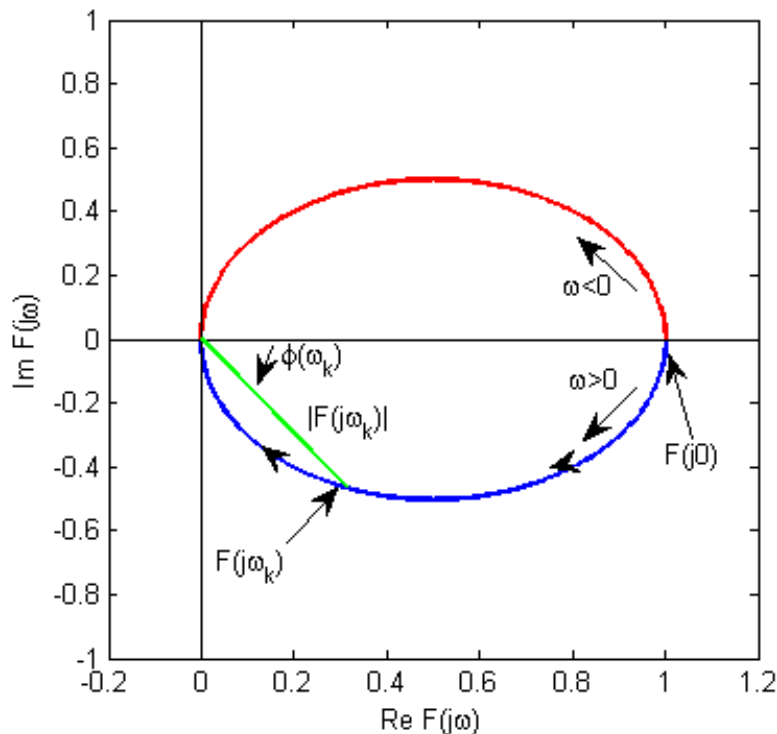
Frekvenční odezva LDS

Nyquistova frekvenční charakteristika (charakteristika v komplexní rovině):

Jedná se o zobrazení hodnot $F(j\omega)$ v závislosti na úhlové frekvenci v kartézských souřadnicích s osami $\text{Re}[F(j\omega)]$ a $\text{Im}[F(j\omega)]$ (v komplexní rovině). Zobrazuje tedy současně amplitudové zesílení a fázový posun. Výpočet Nyquistovy frekvenční charakteristiky ukážeme na jednoduchém příkladu. Systém 1. řádu je popsán frekvenčním přenosem ve tvaru

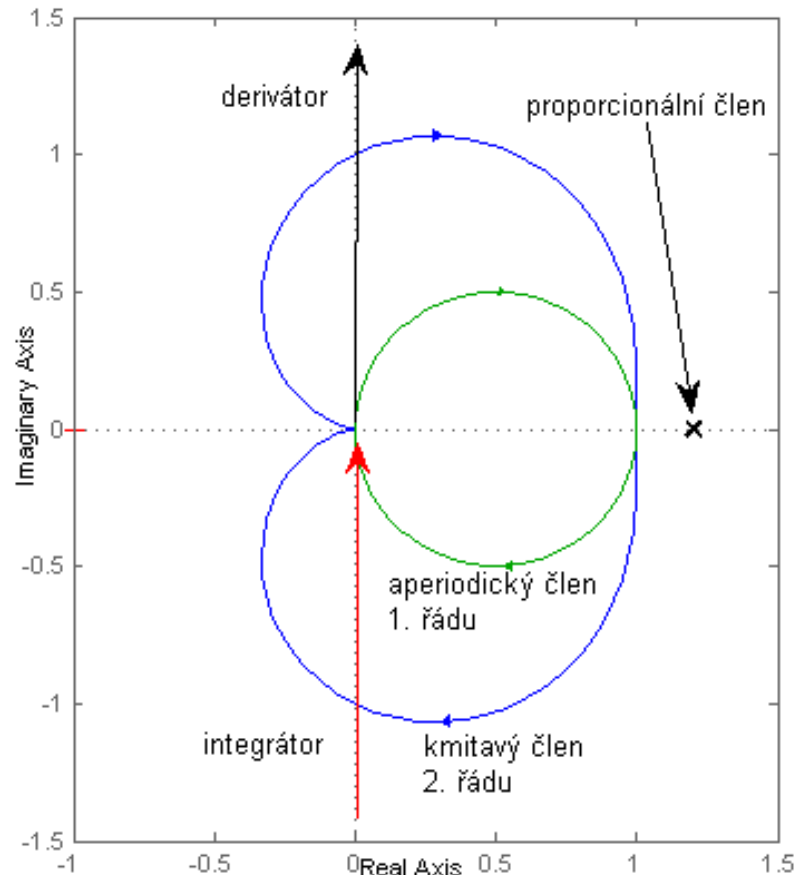
$$F(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} = \frac{1-j\omega}{1+\omega^2}$$

- pro $\omega = 0$, je $F(j0) = 1$.
- pro $\omega \rightarrow \infty$ klesá reálná část $F(j\omega)$ k nule.
- pro $0 < \omega < 1$, abs. hodnota imaginární části $F(j\omega)$ roste.
- pro $1 < \omega < \infty$, abs. hodnota imaginární části $F(j\omega)$ klesá.
- pro $\omega < 0$ je křivka převrácená okolo osy x.



Frekvenční odezva LDS

Nyquistovy frekvenční charakteristiky elementárních členů:



▪derivátor – $F(j0) = 0$, $F(j\infty) = \infty$

▪integrátor - $F(j0) = -\infty$, $F(j\infty) = 0$

▪aperiodický člen 1. řádu

pro $\omega < 1/T$ - $|F(j\omega)|$ téměř konst.

$\omega > 1/T$ – $|F(j\omega)|$ klesá k 0.

$\varphi(\omega)$ se mění v intervalu 0 až -90°

▪kmitavý člen 2. řádu

$|F(j\omega)|$ dosahuje maxima v oblasti rezonanční frekvence:

konkrétně na frekvenci

a pro vyšší frekvence klesá.

$\varphi(\omega)$ se mění v intervalu 0 až -180° .

Frekvenční odezva LDS

Bodeho frekvenční charakteristiky (charakteristiky logaritmických souřadnicích):

Jedná se o oddělené zobrazení amplitudového zesílení a fázového posunu v závislosti na úhlové frekvenci.

- logaritmicko amplitudová frekvenční charakteristika (LAFCH)
na svislou osu se vynáší amplitudové zesílení $|F(j\omega)|$, nebo také amplitudový zisk v decibelech $|F(j\omega)|_{dB}=20\log |F(j\omega)|$.
- logaritmicko fázová frekvenční charakteristika (LFFCH)
na svislou osu se vynáší fázový posun ve stupních $^\circ$, nebo v radiánech.

U obou charakteristik se na vodorovnou osu vynáší úhlová frekvence v logaritmickém měřítku.

Frekvenční odezva LDS

Bodeho frekvenční charakteristiky elementárních členů:

Proporcionální člen

$$F(j\omega) = K$$



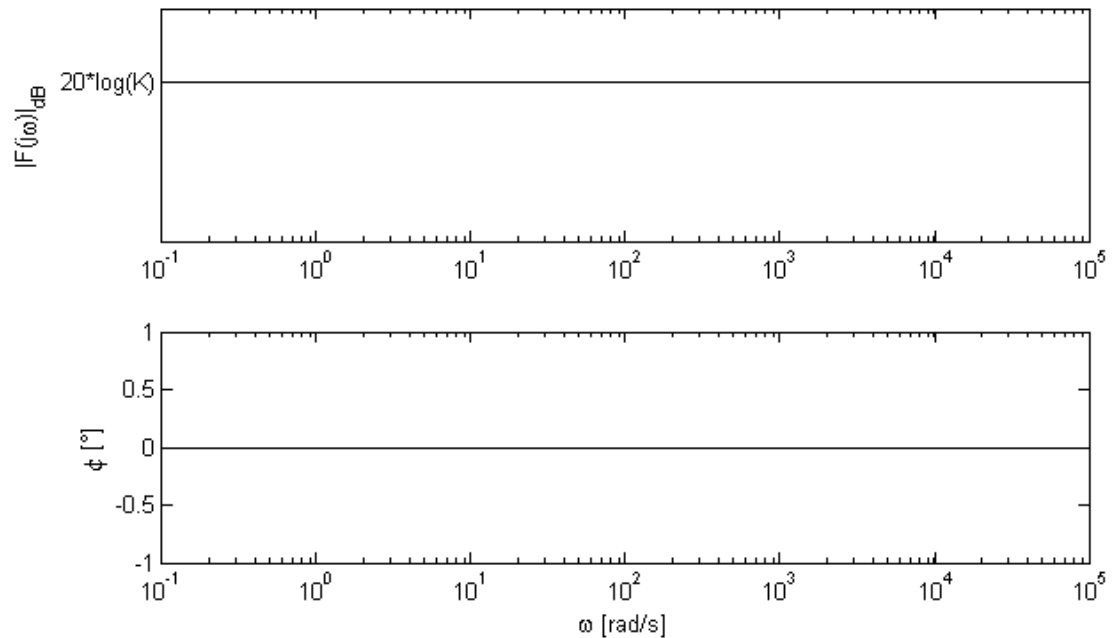
$$\operatorname{Re}[F(j\omega)] = K, \operatorname{Im}[F(j\omega)] = 0$$

amplitudové zesílení:

$$\begin{aligned} |F(j\omega)| &= K \\ |F(j\omega)|_{dB} &= 20 \log K \end{aligned}$$

fázový posun:

$$\varphi(\omega) = 0^\circ$$



Frekvenční odezva LDS

Integrační člen

$$F(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$



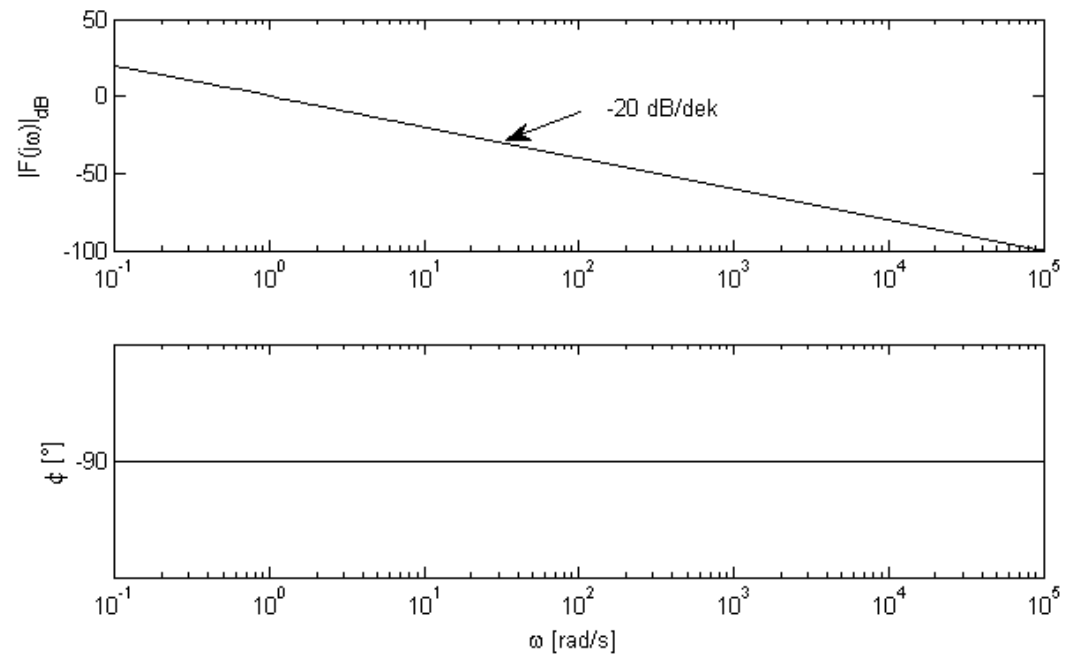
$$\operatorname{Re}[F(j\omega)] = 0, \operatorname{Im}[F(j\omega)] = -\frac{1}{\omega}$$

amplitudové zesílení:

$$\begin{aligned} |F(j\omega)| &= \frac{1}{\omega} \\ |F(j\omega)|_{dB} &= 20\log 1 - 20\log \omega \end{aligned}$$

fázový posun:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}[F(j\omega)]}{\operatorname{Re}[F(j\omega)]} = -90^\circ$$



Frekvenční odezva LDS

Derivátor

$$F(j\omega) = j\omega$$



$$\operatorname{Re}[F(j\omega)] = 0, \operatorname{Im}[F(j\omega)] = \omega$$

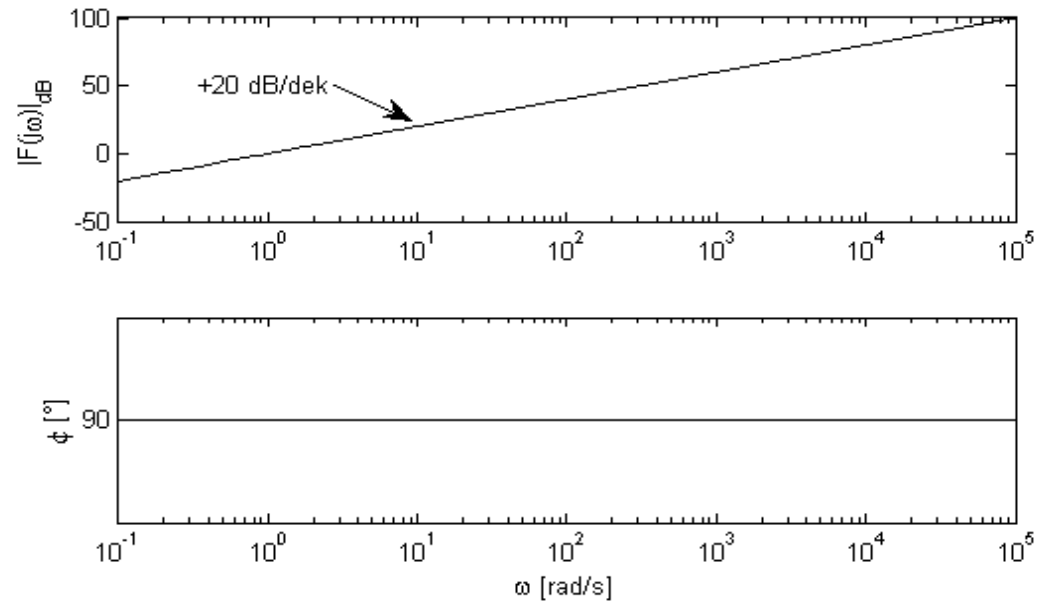
amplitudové zesílení:

$$|F(j\omega)| = \omega$$

$$|F(j\omega)|_{dB} = 20 \log \omega$$

fázový posun:

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\operatorname{Im}[F(j\omega)]}{\operatorname{Re}[F(j\omega)]} = 90^\circ$$



Frekvenční odezva LDS

Derivační člen

$$F(j\omega) = j\omega$$



$$\operatorname{Re}[F(j\omega)] = 0, \operatorname{Im}[F(j\omega)] = \omega$$

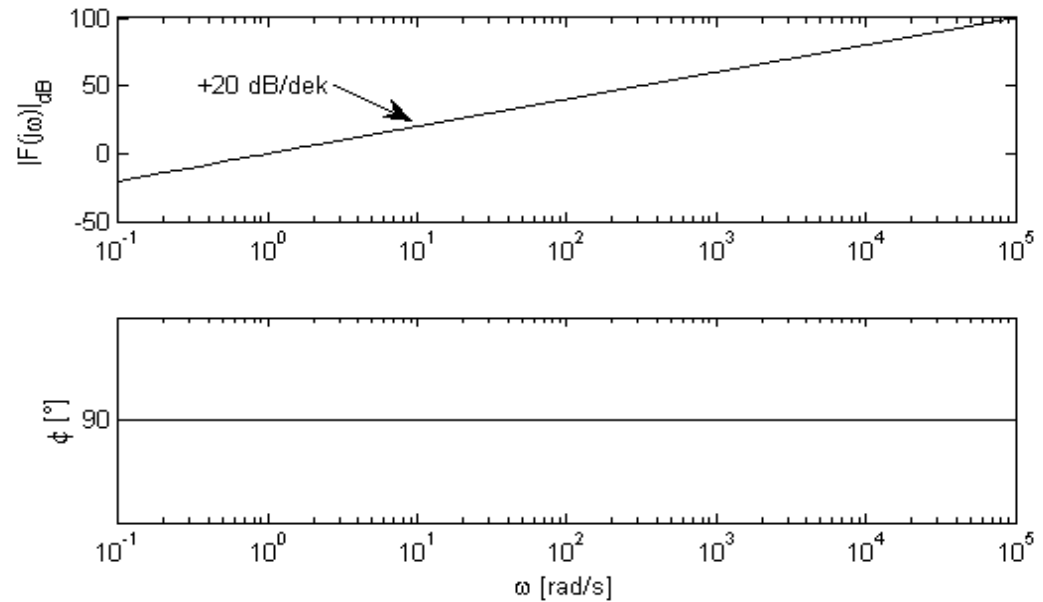
amplitudové zesílení:

$$|F(j\omega)| = \omega$$

$$|F(j\omega)|_{dB} = 20 \log \omega$$

fázový posun:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}[F(j\omega)]}{\operatorname{Re}[F(j\omega)]} = 90^\circ$$



Frekvenční odezva LDS

Aperiodický člen 1. řádu

$$F(j\omega) = \frac{1}{j\omega T + 1}$$



$$\operatorname{Re}[F(j\omega)] = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2} = \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_z^2}}, \operatorname{Im}[F(j\omega)] = -\frac{\omega T}{1 + \omega^2 T^2} = -\frac{\frac{\omega}{\omega_z}}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_z^2}}$$

amplitudové zesílení:

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_z^2}}}$$

$$|F(j\omega)|_{dB} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_z^2}}}$$

fázový posun:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}[F(j\omega)]}{\operatorname{Re}[F(j\omega)]} = \operatorname{arctg} \left(-\frac{\omega}{\omega_z} \right)$$

ω_z – zlomová frekvence, $\omega_z = 1/T$

Frekvenční odezva LDS

Přímková aproximace

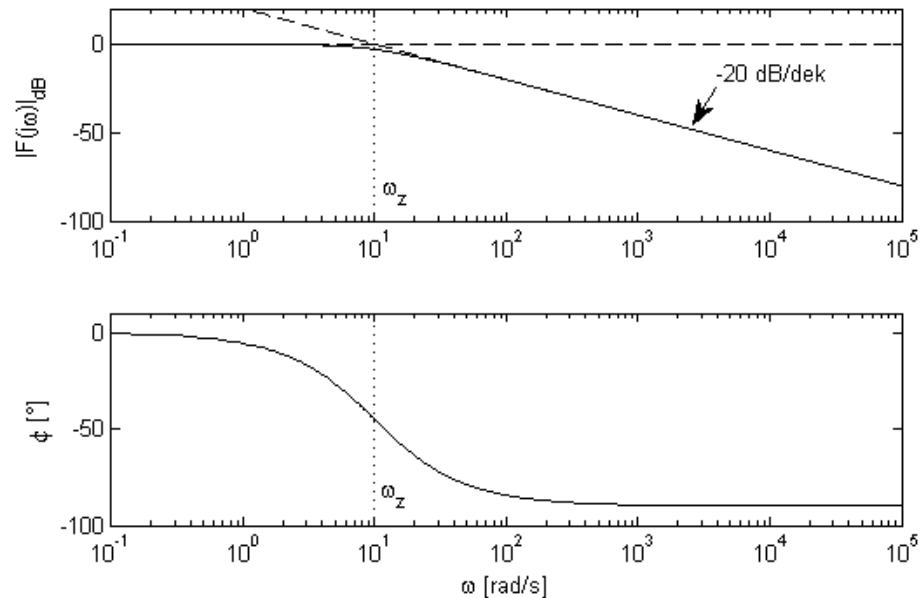
Pro $\omega \ll \omega_z$

$$\frac{\omega^2}{\omega_z^2} \ll 1, \text{ tj. } |F(j\omega)|_{dB} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_z^2}}} \cong 0dB$$
$$\omega = \omega_z$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_z^2} = 1, \text{ tj. } |F(j\omega)|_{dB} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1+1}} = -3dB$$

$\omega \gg \omega_z$

$$\frac{\omega^2}{\omega_z^2} \gg 1, \text{ tj. } |F(j\omega)|_{dB} = 20 \log \omega_z - 20 \log \omega$$



Maximální chyba vzniklá aproximací frekvenční charakteristiky přímkami je pro $\omega = \omega_z$ -3dB.

Frekvenční odezva LDS

Kmitavý člen 2. řádu

$$F(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + j2\xi\omega_n\omega}$$



$$\operatorname{Re}[F(j\omega)] = \frac{\omega_n^2(\omega_n^2 - \omega^2)}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2}, \operatorname{Im}[F(j\omega)] = -\frac{2\xi\omega_n^3\omega}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2}$$

amplitudové zesílení:

$$|F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2\omega^2}{\omega_n^2}}}$$

$$|F(j\omega)|_{dB} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2\omega^2}{\omega_n^2}}}$$

fázový posun:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}[F(j\omega)]}{\operatorname{Re}[F(j\omega)]} = \operatorname{arctg} \left(-\frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \right)$$

zlomová frekvence, $\omega_z = \omega_n$

Frekvenční odezva LDS

Přímková aproximace

Pro $\omega \ll \omega_n$

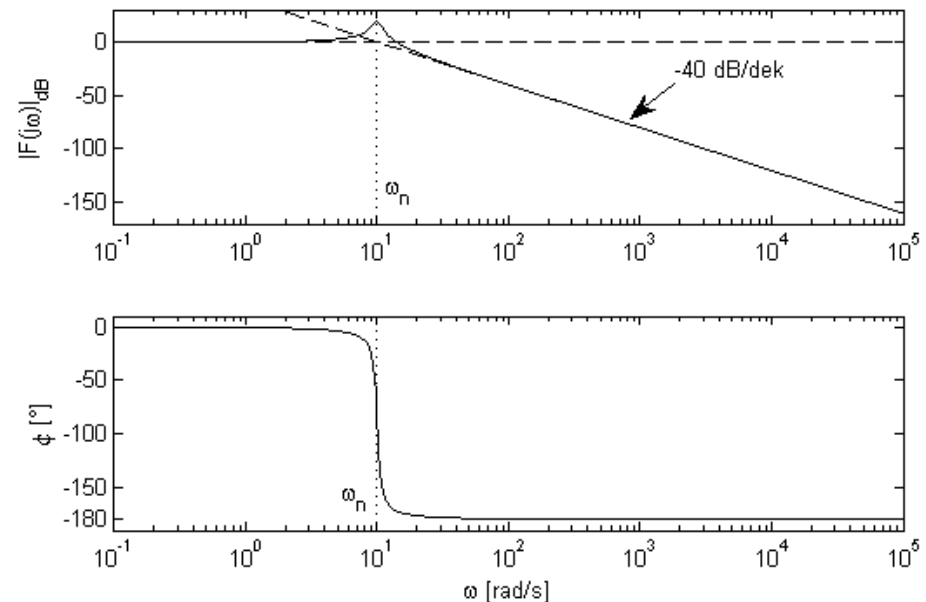
$$\frac{\omega^2}{\omega_z^2} \ll 1, \text{ tj. } |F(j\omega)|_{dB} = 20 \log 1 \cong 0 dB$$

$$\omega = \omega_n$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_z^2} = 1, \text{ tj. } |F(j\omega)|_{dB} = -20 \log 2\xi \text{ dB}$$

$$\omega \gg \omega_n$$

$$\frac{\omega^2}{\omega_z^2} \gg 1, \text{ tj. } |F(j\omega)|_{dB} = 40 \log \omega_n^2 - 40 \log \omega^2$$

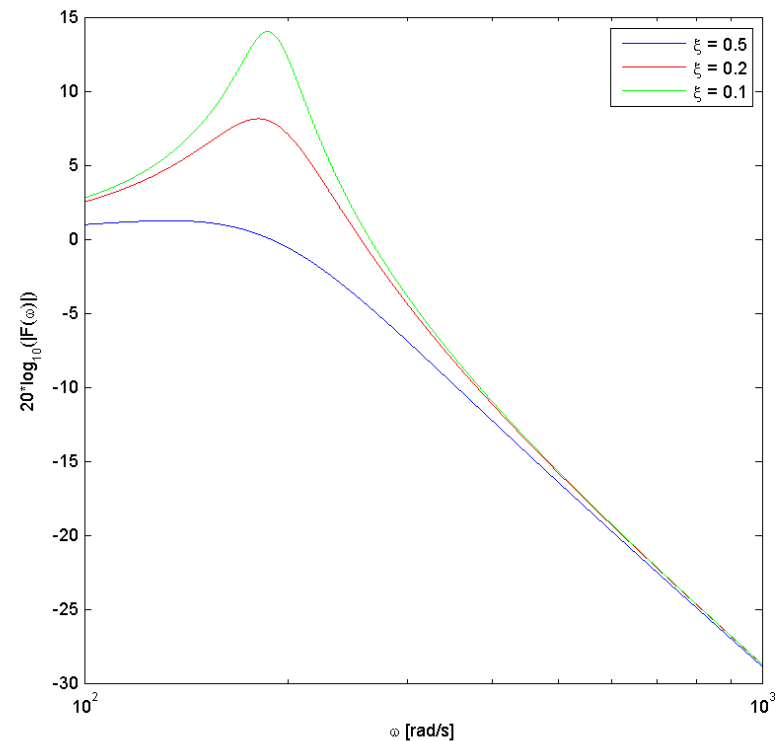
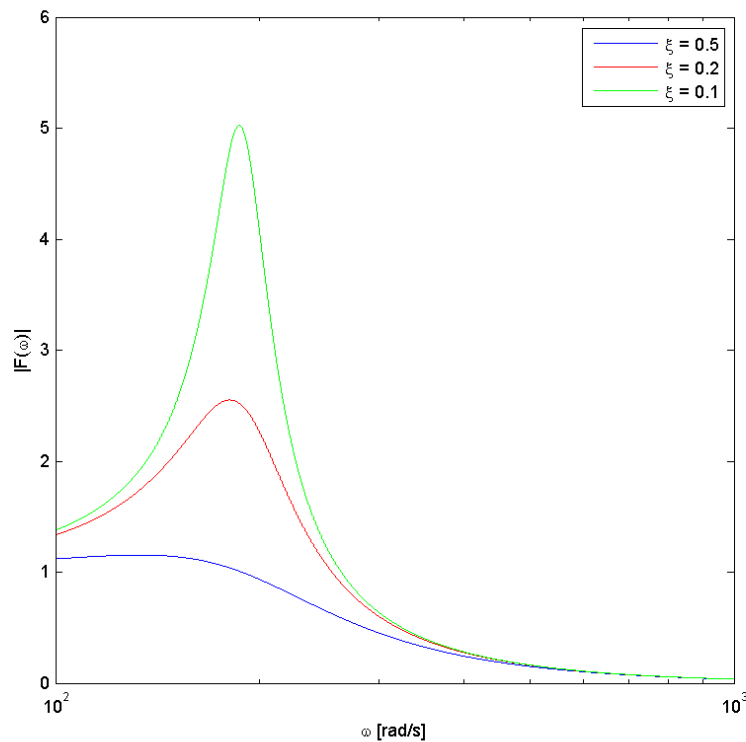


Pro $\xi \rightarrow 0$ se hodnota maxima frekvenční charakteristiky zvyšuje teoreticky do ∞ .

Maximum nabývá frekvenční charakteristika na frekvenci $\omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$.

Frekvenční odezva LDS

Vliv činitele tlumení na velikost rezonančního vrcholu



Zdroje a doporučená literatura

Zdroje a doporučená literatura

- F. Tůma: Kybernetika, skripta, ZČU v Plzni
- J. Melichar: učební texty k předmětu Lineární systémy 1, ZČU v Plzni, dostupné na http://www.kky.zcu.cz/uploads/courses/ls1/LS1_Ucebni_texty_2011.pdf
- V. Srovnal: Kybernetika, skripta, VŠB – TU Ostrava, 2008
<http://homel.vsb.cz/~ote009/files/kyb/Kybernetika.pdf>
- I. Švarc: učební texty k předmětu Automatizace a regulace, VUT v Brně, dostupné na <http://autnt.fme.vutbr.cz/svarc/ZakladyAutomatizace.pdf>