INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Aplikace kybernetiky ve strojírenství

12. přednáška

Doc. Ing. Eduard Janeček, CSc.

Ing. Jan Jakl

Podpořeno v rámci projektu CZ.1.07/2.2.00/15.0383
Inovace studijního oboru Dopravní a manipulační technika
s ohledem na potřeby trhu práce

Lineární stavový regulátor

V případě stavového regulátoru není akční zásah generován na základě regulační odchylky, ale řízení je dáno lineární kombinací složek stavového vektoru. Stavový regulátor patří do skupiny nedynamických regulátorů, protože lineární kombinace nezanáší do regulačního obvodu další dynamiku.

Uvažujme lineární dynamický systém n-tého řádu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \qquad x(t_0),\ x(t) \in R^n,\ u(t) \in R,\ y(t) \in R$$
$$y(t) = c^T x(t)$$

Zpětnovazební stavový regulátor generuje řízení jako lineární kombinaci stavu systému

$$u(t) = -k^T x(t)$$

k je 1xn. Pokud by systém měl m vstupů, pak by se jednalo o matici mxn.

Po dosazení řízení do rovnic stavového popisu systému získáme

$$\dot{x}(t) = \left(A - bk^T\right) x(t)$$
$$y(t) = c^T y(t)$$

Vidíme, že se jedná o autonomní systém. Stabilita systému je dána vlastními čísly matice $A - bk^T$.

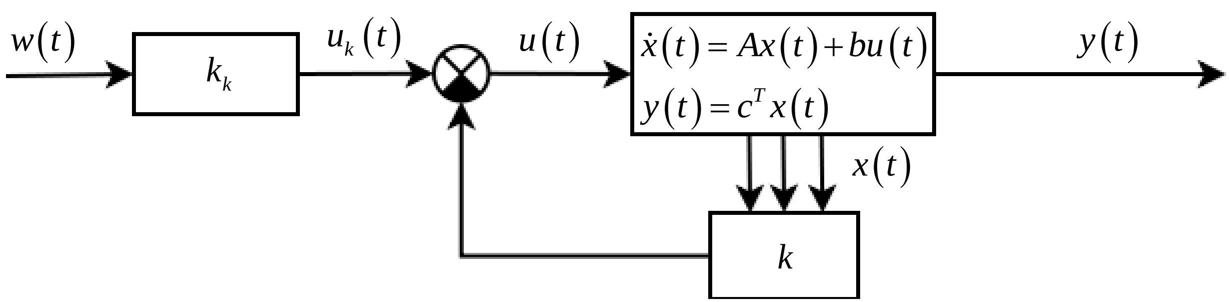
$$\det\left(pI - A + bk^T\right)$$

Jestliže jsou reálné části všech vlastních čísel matice $A - bk^T$ záporná, pak je systém stabilní a po odeznění počátečních podmínek (systém nemá žádný vstup, takže jediná jeho odezva může být reakce na počáteční podmínky) bude platit

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = 0$$

Jestliže chceme aby se regulovaná veličina ustálila na požadované hodnotě w, nebo aby výstup systému sledoval požadovaný signál $w(t)$, pak musíme zpětnovazební stavové řízení doplnit kompenzačním řízením $u_k(t)$. Výsledná rovnice stavového regulátoru tedy je

$$u(t) = -k^T x(t) + u_k(t) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \left(A - bk^T\right)x(t) + bu_k(t) \\ y(t) &= c^T y(t) \end{aligned}$$



Návrh stavového regulátoru s požadavkem na umístění pólů

Vnitřní popis systému řízeného stavovým regulátorem s kompenzačním řízením

$$\dot{x}(t) = \left(A - bk^T\right)x(t) + bu_k(t)$$

$$y(t) = c^T y(t)$$

Stavový regulátor nezvyšuje řád systému (na rozdíl od dynamických regulátorů). Mění však vlastní čísla matice dynamiky a tedy mění póly uzavřeného regulačního systému (nuly zůstávají nezměněny).

$$\det(pI - A) \Rightarrow \det\left(pI - A + bk^T\right)$$

Póly uzavřené regulační smyčky jsou rovny kořenům charakteristického polynomu

$$a_z(p) = \det\left(pI - A + bk^T\right) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0$$

Ze zadaného charakteristického polynomu je tedy možné určit vektor k^T stavového regulátoru.

Libovolné umístitelnosti pólů uzavřené regulační smyčky pomocí stavového regulátoru lze dosáhnout v případě, že je řízení systém řiditelný.

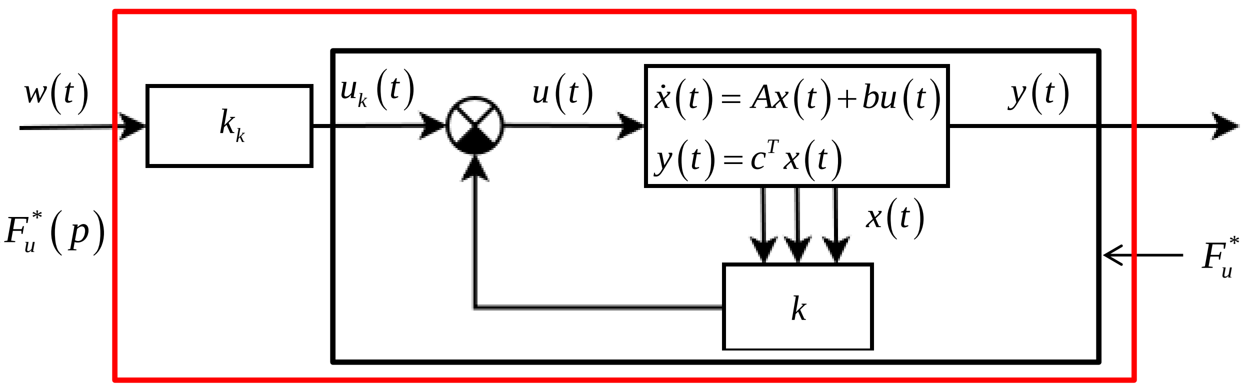
Pozn: Systém je řiditelný, jestliže pro každý počáteční stav systému různý od nuly ($\forall x(t_0) \neq 0$), existuje na časovém intervalu $t \in [t_0, t_1]$ takové řízení, které způsobí změnu počátečního stavu $x(t_0)$ do stavu $x(t_1) = 0$. Pro vyšetřování řiditelnosti spojitých LDS slouží matice řiditelnosti $Q_ř$. Jestliže je LDS řiditelný, pak hodnost matice řiditelnosti je rovna dimenzi stavu systému:

$$h[Q_ř] = h\left[b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b\right] = \dim\left(x(t)\right) = n$$

Kompenzační řízení

Jestliže požadujeme aby regulovaná veličina v ustáleném stavu sledovala požadovanou veličinu $w(t)$, pak musí být model systému, který generuje $w(t)$, zahrnut do otevřené regulační smyčky. Při regulaci na konstantní hodnotu $W(p) = konst / p$ tedy musí otevřená regulační smyčka obsahovat integrátor (pokud není obsažen v přenosu systému musí nýt zahrnut v přenosu regulátoru, vzpomeňte na PI a PID regulátory). Zde se budeme zabývat korekcí statického zesílení uzavřené regulační smyčky.

$$F_u(p) = \frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{w}{p} k_k F_u^*(p)$$



$$F_u^*(p) = \frac{Y(p)}{U_k(p)}$$

Z věty o konečné hodnotě plyne

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{p\to 0} pY(p) = \lim_{p\to 0} pF_u\,(p)W(p) = \lim_{p\to 0} pF_u^*(p)\frac{w}{p}k_k = wF_u^*(0)k_k$$

Z požadavku $y(\infty)=w$ dále plyne, že součin $F_u^*(0)k_k = 1$. Kompenzační zesílení tedy je

$$k_k = \frac{1}{F_u^*(0)}$$

Příklad:

Navrhněte lineární stavový regulátor pro dynamický systém popsaný přenosovou funkcí

$$F_s(p) = \frac{b(p)}{a(p)} = \frac{2}{p^2 + p + 2}$$

Parametry regulátoru určete s ohledem na požadované umístění pólů uzavřené smyčky $p_{1,2} = -2 \pm j\sqrt{2}$.

Řešení:

Z přenosové funkce určíme diferenciální rovnici popisující daný systém:

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + 2y(t) = 2u(t), \qquad y(t_0) = \dot{y}(t_0) = 0$$

Volíme stavové proměnné

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_1(t) - x_2(t) + 2u(t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1(t_0) &= 0 \\ x_2(t_0) &= 0 \end{aligned}$$

Z rovnice pro charakteristický polynom uzavřeného regulačního systému vypočteme parametry stavového regulátoru:

$\det\left(pI - A + bk^T\right) = a_z(p) = (p - p_1)(p - p_2)$ dosadíme známé hodnoty A, b a $p_{1,2}$

$$\det\left(\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2k_1 & 2k_2 \end{bmatrix}\right) = \left(p + 2 + j\sqrt{2}\right)\left(p + 2 - j\sqrt{2}\right)$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} p & -1 \\ 2 + 2k_1 & p + 1 + 2k_2 \end{bmatrix}\right) = \left(p + 2 + j\sqrt{2}\right)\left(p + 2 - j\sqrt{2}\right)$$

$p^2 + p(1 + 2k_2) + 2 + 2k_1 = p^2 + 4p + 6$ porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin p a řešíme soustavy dvou rovnic pro dvě neznámé:

$$\begin{aligned} 2 + 2k_1 &= 6 \\ 1 + 2k_2 &= 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad k = \begin{bmatrix} 2 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

Zbývá určit kompenzační zesílení regulátoru. Přenosová funkce $F_u^*(p)$ je

$$F_u^*(p) = \frac{b(p)}{a_z(p)} = \frac{2}{p^2 + 4p + 6} \quad \Rightarrow \quad k_k = \frac{1}{F_u^*(0)} = 3$$

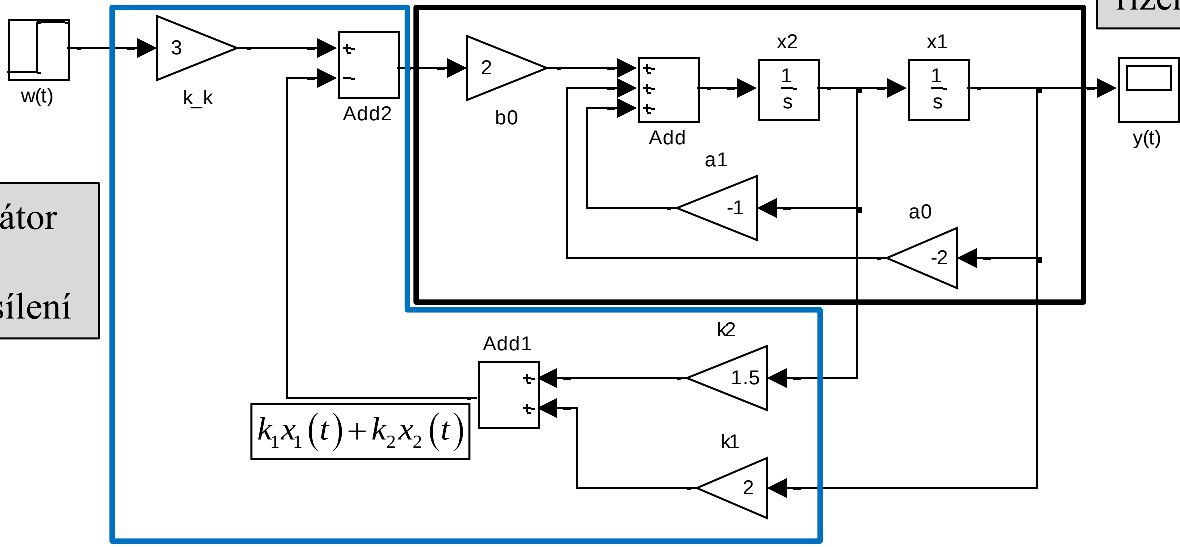
Nyní už můžeme napsat rovnici stavového regulátoru

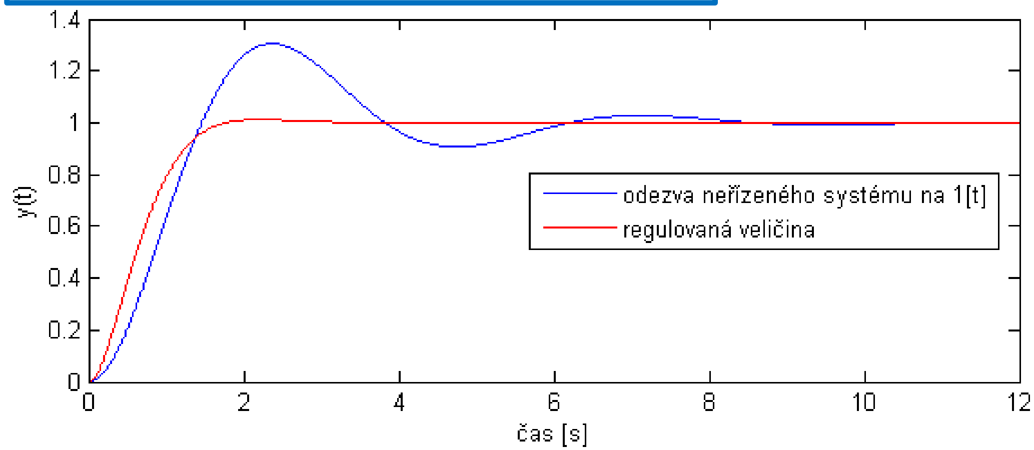
$$u(t) = -\begin{bmatrix} 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} x(t) + 3w(t)$$

Simulační schéma v programu Matlab/Simulink

řízený systém

stavový regulátor
s kompenzací
statického zesílení





Rekonstruktor stavu

V reálných aplikacích je zpravidla nemožné měřit všechny složky vektoru stavu. Jestliže potřebujeme znát jejich průběh (například pro návrh stavového regulátoru), pak musíme vektor stavu rekonstruovat na základě dostupných informací o systému (jeho matematický popis, vstupy a výstupy systému nebo některé složky stavového vektoru). V dalším se omezíme pouze na lineární, t-invariantní, pozorovatelné dynamické systémy a pomocí rekonstruktoru budeme odhadovat všechny složky stavového vektoru.

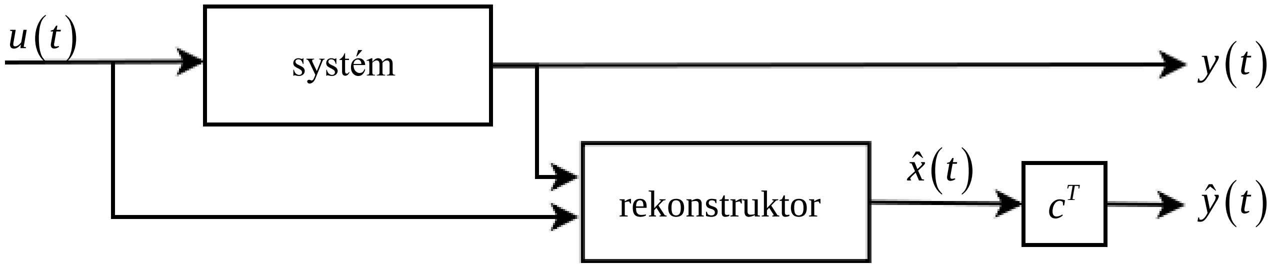
Lineární asymptotický rekonstruktor stavu

Uvažujme systému n-tého řádu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \qquad x(t_0),\ x(t) \in R^n,\ u(t) \in R,\ y(t) \in R$$

$$y(t) = c^T x(t)$$

Předpokládejme, že žádná složka vektoru stavu není měřena. Cílem je navrhnout takový systém, který by na základě dostupných informací průběžně rekonstruoval stavový vektor systému.



Vzhledem k tomu, že úkolem rekonstruktoru je průběžně odhadovat stavy dynamického systému, bude se jednat také o dynamický systém.

$$\dot{\hat{x}}(t) = F\hat{x}(t) + gu(t) + k^* y(t)$$
$$\hat{y}(t) = c^T \hat{x}(t)$$

Úkolem je určit matice F, g a k^*. Při rekonstrukci stavu musíme respektovat, že $\hat{x}(t_0) \neq x(t_0)$.
Jestliže má být vektor stavu určen na základě měření výstupu systému, musí být systém pozorovatelný.
Pozn: Systém je pozorovatelný, jestliže pozorováním vstupu u(t) a výstupu y(t) na konečném časovém intervalu $t \in [t_0, t_1]$ je možné určit počáteční stav $x(t_0)$. Pro vyšetřování pozorovatlenosti spojitých LDS slouží matice pozorovatelnosti Q_p. Jestliže je LDS pozorovatelný, pak hodnost matice pozorovatelnosti je rovna dimenzi stavu systému:

$$h\left[Q_p\right] = h\left[c^T, c^T A, c^T A^2, \dots, c^T A^{n-1}\right]^T = \dim\left(x(t)\right) = n$$

Rekonstruktor by měl splňovat následující podmínky:

1. stav $\hat{x}(t)$ by měl konvergovat ke skutečnému stavu $x(t)$,
2. průběh rekonstrukce by měl být nezávislý na vstupním signálu systému u(t) a na hodnotě stavu $x(t)$.

Pro odvození matic ve stavovém popisu rekonstruktoru definujme chybu rekonstrukce jako rozdíl rekonstruovaného stavu a skutečného stavu systému

$$\varepsilon(t) = \hat{x}(t) - x(t)$$

Podmínka na vývoj chyby rekonstrukce pro asymptotický rekonstruktor

$$\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)=\lim_{t\to\infty}\hat{x}(t)-\lim_{t\to\infty}x(t)=0$$

Zderivujme vztah pro chybu rekonstrukce podle času a dosaďme z rovnic stavového popisu systému a rekonstruktoru

$$\dot{\varepsilon}(t)=\dot{\hat{x}}(t)-\dot{x}(t)$$
$$\dot{\varepsilon}(t)=F\hat{x}(t)+gu(t)+k^{*}y(t)-Ax(t)-bu(t)+\overbrace{Fx(t)-Fx(t)}^{0}$$
$$\dot{\varepsilon}(t)=F\left[\hat{x}(t)-x(t)\right]+\left(F-A+k^{*}c^{T}\right)x(t)+(g-b)u(t)$$
$$\dot{\varepsilon}(t)=F\varepsilon(t)+\left(F-A+k^{*}c^{T}\right)x(t)+(g-b)u(t)$$

Chybu rekonstrukce generuje dynamický systém, na jehož vstupu jsou skutečný stav systému x(t) a vstup systému u(t). Jak bylo uvedeno na předchozí straně, rekonstruktor by neměl záviset na hodnotách x(t) a u(t). Pro nenulové hodnoty těchto veličin je tato podmínka splněna pokud platí

$$F-A+k^{*}c^{T}=0$$
$$g-b=0$$

$\Rightarrow$ matice ve stavovém popisu rekonstruktoru $\Rightarrow$

$$F=A-k^{*}c^{T}$$
$$g=b$$

Dynamický systém chyby rekonstrukce je tedy autonomní systém

$$\dot{\varepsilon}(t) = F\varepsilon(t)$$

který reaguje pouze na nenulové počáteční podmínky $\varepsilon(t_0) = \hat{x}(t_0) - x(t_0) \neq 0$. Aby byla splněna podmínka pro asymptotický rekonstruktor ($\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = 0$) musí být systém stabilní. O stabilitě a také o dynamice systému rozhodují vlastní čísla matice dynamiky F. Pokud tedy zvolíme požadovaná vlastní čísla matice F (póly dyn. systému rekonstruktoru), můžeme určit podobu matice k.

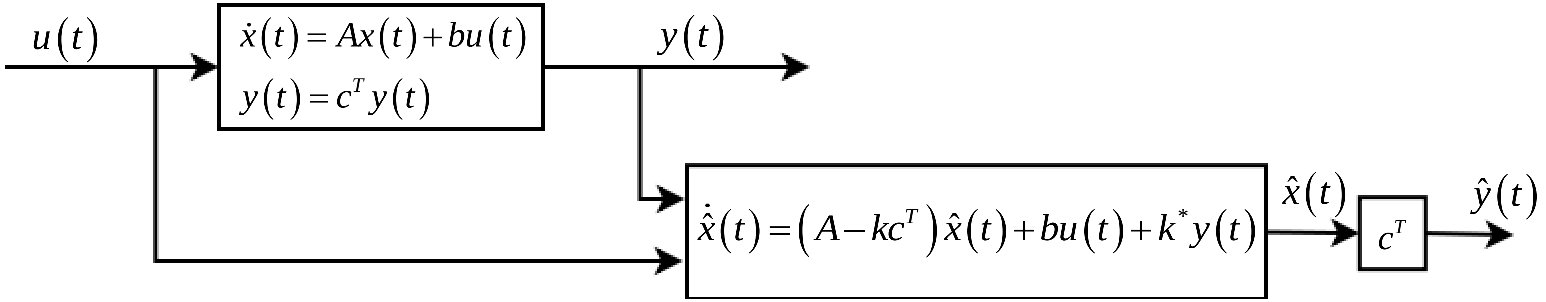
$$\det(pI - F) = \det(pI - A + k^* c^T) = p^n + a_{n-1}^* p^{n-1} + \ldots + a_1^* p + a_0^* = a^*(p)$$

kde $a^*(p)$ představuje požadovaný charakteristický polynom.

Nyní již můžeme psát stavový popis rekonstruktoru stavu ve tvaru

$$\dot{\hat{x}}(t) = \left(A - k^* c^T\right)\hat{x}(t) + bu(t) + ky(t)$$

$$\hat{y}(t) = c^T \hat{x}(t)$$

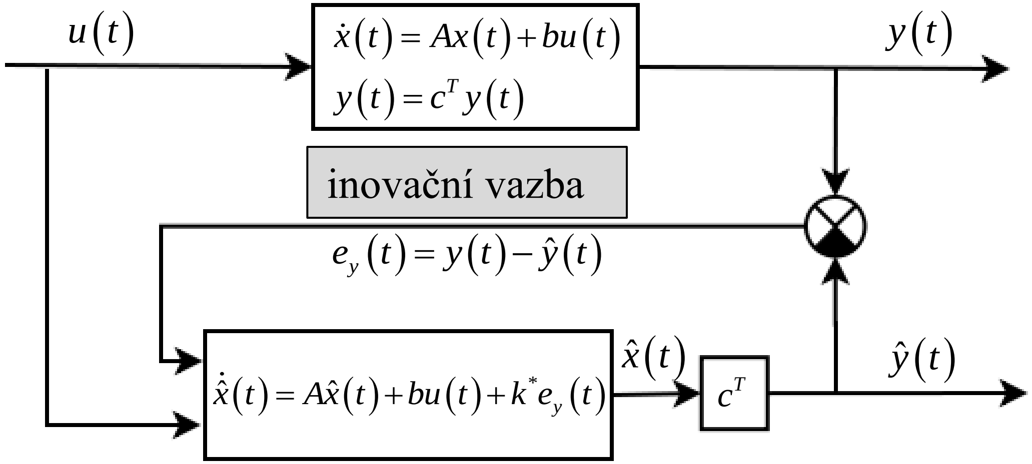


Úpravou předchozích stavových rovnic získáme rovnice rekonstruktoru v jiném tvaru

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + bu(t) + k^{*}\left[y(t) - \hat{y}(t)\right]$$

$$\hat{y}(t) = c^{T}\hat{x}(t)$$

Z těchto rovnic vidíme, že na rekonstruktor lze nahlížet také jako na paralelní model k systému, který je však navíc řízen inovační zpětnou vazbou.



Jestliže $\hat{x}(t_0) = x(t_0)$ pak je rekonstruktor nefunkční a jedná se pouze o paralelní model systému. Tento poznatek lze zobecnit i pro libovolný čas t. Odezva stabilního systému na konstantní vstupní signál se po určité době ustálí a rekonstruovaný stav se bude (téměř) rovnat skutečnému stavu systému.

Jestliže v určitém čase t_1 začne na systém působit porucha, pak je chyba rekonstrukce a také hodnota rozdílu $k^*\left[y(t)-\hat{y}(t)\right]$ v inovační vazbě nenulová (porucha není zahrnuta v modelu rekonstruktoru) a rekonstruktor opět začne vykonávat svoji funkci.

Příklad:

Navrhněte asymptotický rekonstruktor stavu k systému popsanému diferenciální rovnicí

$$\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+4y(t)=u(t)$$

Počáteční podmínky jsou $y(t_0)=0,\ \dot{y}(t_0)=0.$

Řešení:

Určíme stavový model systému abychom mohli určit jednotlivé matice v modelu rekonstruktoru.

Zvolíme stavové proměnné a určíme vnitřní popis systému

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -4x_1(t)-3x_2(t)+u(t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} x(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \quad \begin{aligned} x_1(t_0) &= 0 \\ x_2(t_0) &= 0 \end{aligned}$$

Zvolíme kořeny charakteristického polynomu matice F a vypočteme vektor k^*. Volíme $p_{1,2} = -2$.
Tedy $\det(pI - F) = \det\left(pI - A + k^* c^T\right) = (p - p_1)(p - p_2)$. Po dosazení

$$\det\left(\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ k_2 & 0 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} p + k_1^* & -1 \\ 4 + k_2^* & p + 3 \end{bmatrix}\right) = \left(p + k_1^*\right)(p + 3) + 4 + k_2^* = p^2 + 4p + 4$$

Parametry k_1^* a k_2^* získáme z porovnání koeficientů u jednotlivých mocnin p.

$$k_1^* + 3 = 4$$
$$3k_1^* + k_2^* + 4 = 4$$
$$\Rightarrow \quad k^* = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Stavový popis rekonstruktoru

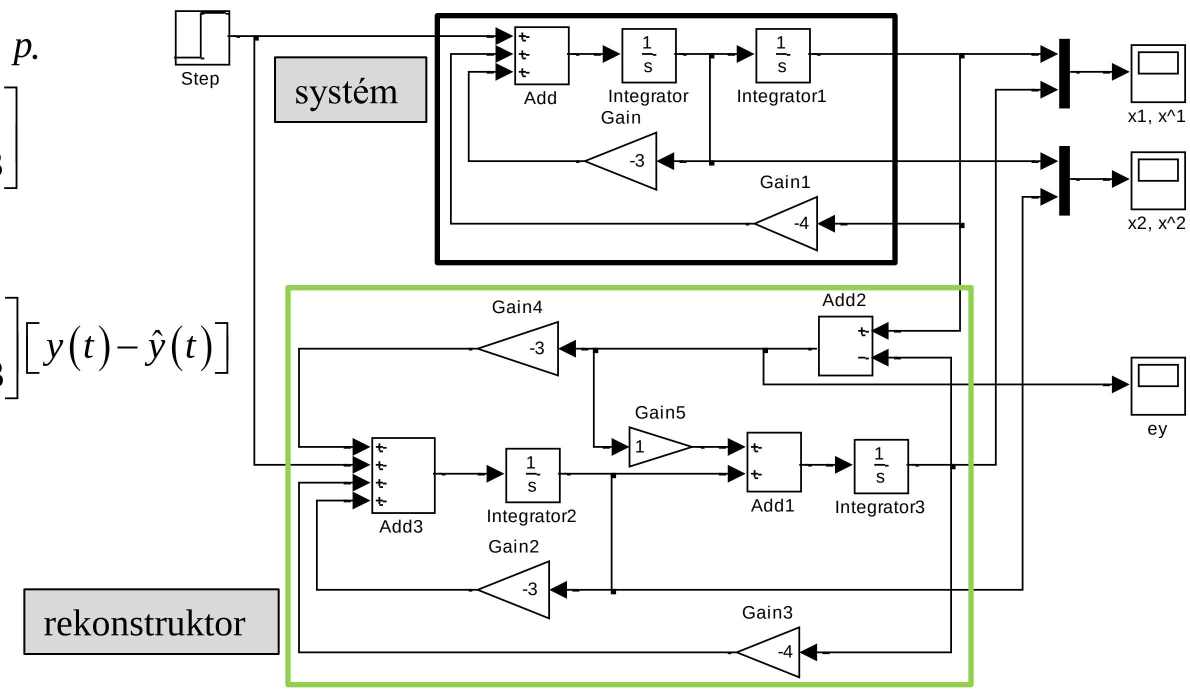
$$\dot{\hat{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}\left[y(t) - \hat{y}(t)\right]$$

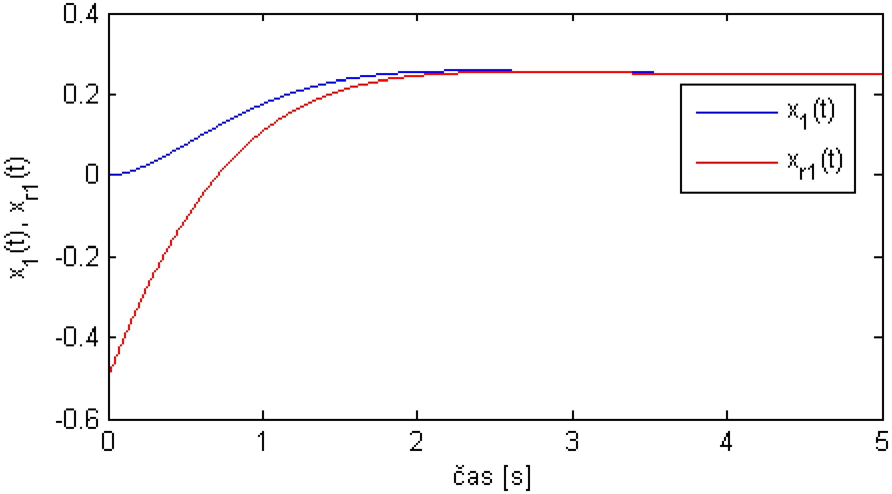
$$\hat{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

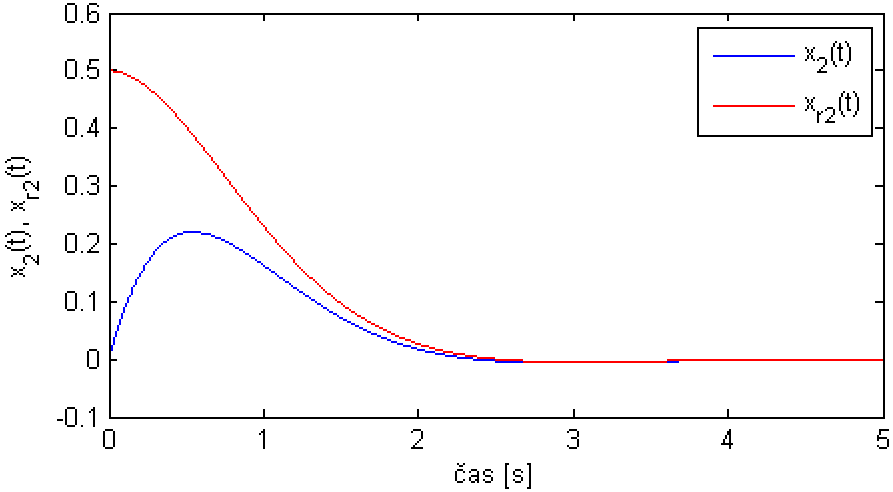
počáteční podmínky

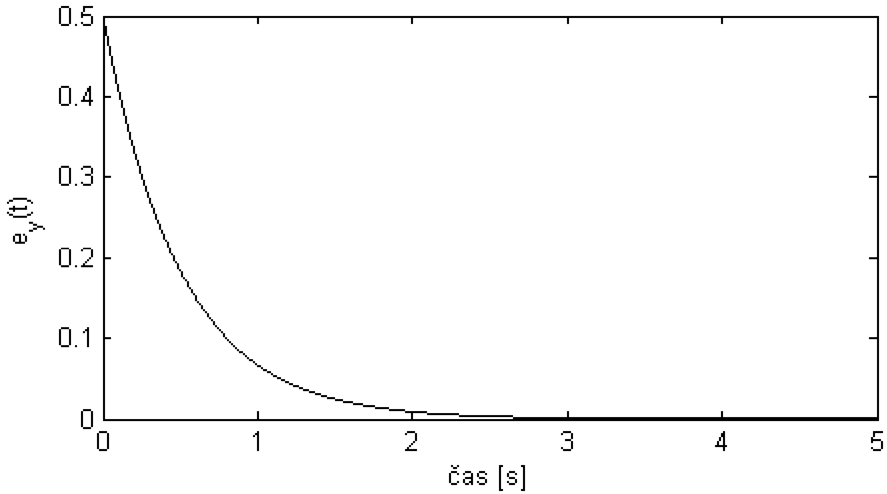
$$\hat{x}_1(t_0) = -0.5, \quad \hat{x}_2(t_0) = 0.5$$

Simulační schéma v programu Matlab/Simulink





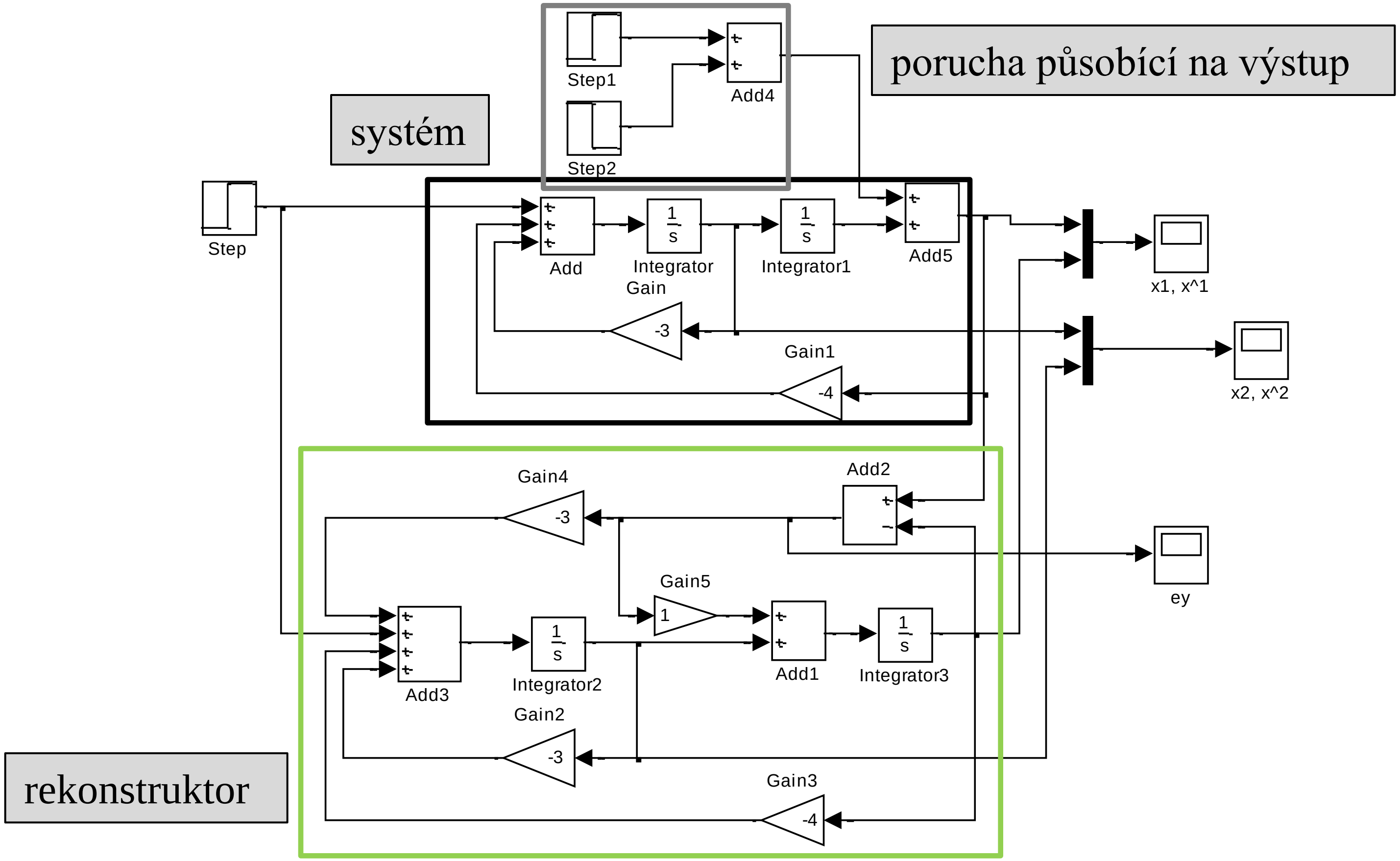


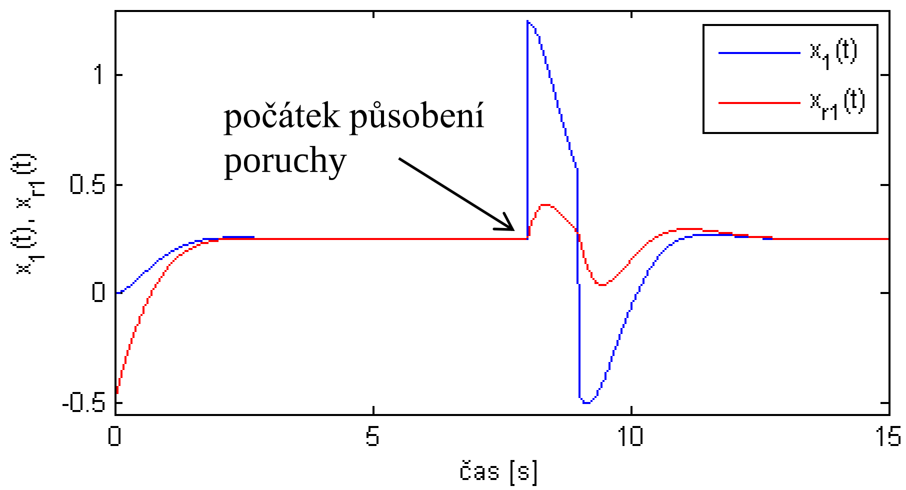


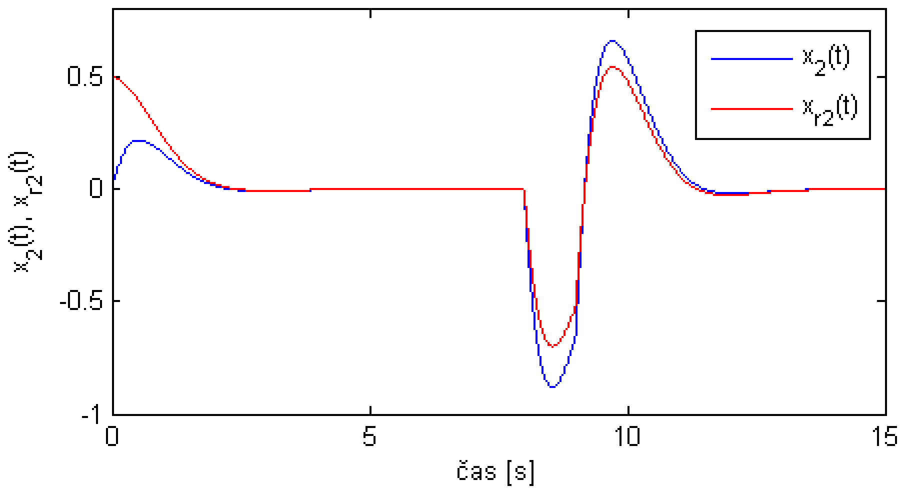
- rekonstruované stavy konvergují ke skutečným stavům,
- rozdíl v inovační vazbě konverguje k nule,
- rychlost konvergence je dána kořeny charakteristického polynomu matice F

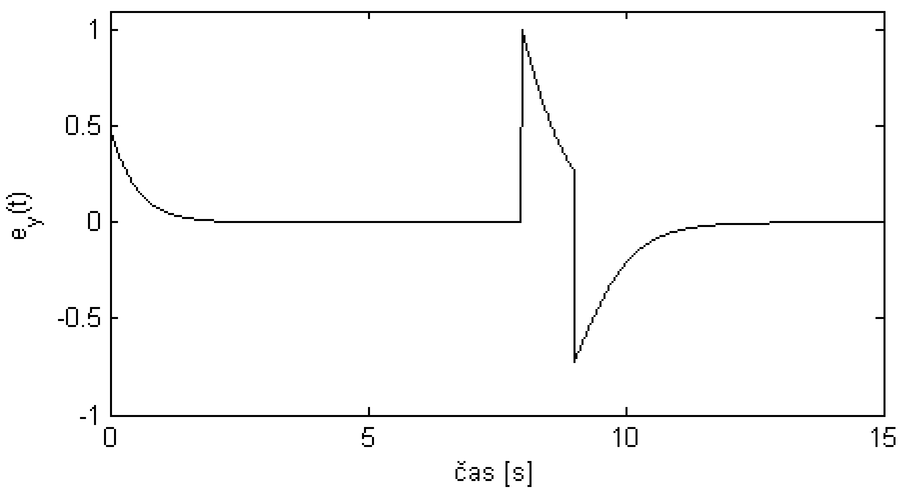
  (čím menší hodnota pólu, tím pomalejší dynamika rekonstruktoru)

Uvažujme stejný systém jako v předchozím příkladu. Rekonstruktor je již navržen a zkoumejme situaci, kdy bude na výstupu systému krátkodobě působit porucha.





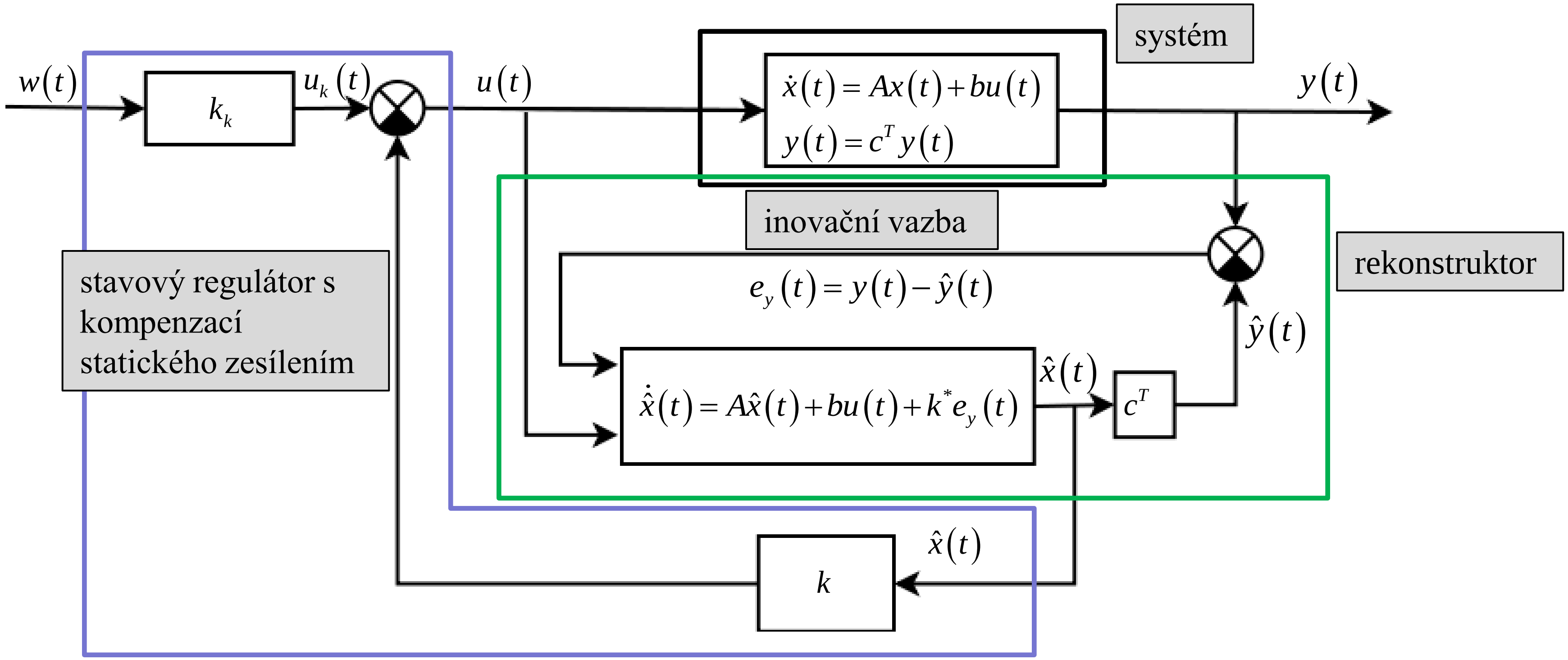




- po ustálení dynamiky přestane rekonstruktor pracovat, inovační vazba přenáší nulovou hodnotu
- doba trvání poruchy je 1s.
- hodnoty výstupu systému a rekonstruktoru jsou odlišné (porucha není v modelu rekonstruktoru zahrnuta) => nenulová hodnota v inovační vazbě opět nastartuje rekonstrukci stavu.

Dynamický kompenzátor

Pojmem dynamický kompenzátor se označuje lineární stavový regulátor, který pro výpočet řízení využívá rekonstruovaný stav systému.



Při návrhu dynamického kompenzátoru řešíme dvě úlohy. První z nich je návrh asymptotického rekonstruktoru stavu a druhá je návrh zpětnovazebního stavového regulátoru. Obě tyto úlohy mohou být řešeny nezávisle na sobě.

Uvažujme řiditelný a pozorovatelný systém

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \qquad x(t_0),\ x(t) \in R^n,\ u(t) \in R,\ y(t) \in R$$
$$y(t) = c^T x(t)$$

asymptotický rekonstruktor stavu je popsán vnitřním modelem

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + bu(t) + k^*\left[y(t) - \hat{y}(t)\right]$$
$$\hat{y}(t) = c^T \hat{x}(t)$$

stavový regulátor generuje řízení na základě rekonstruovaného stavu $\hat{x}(t)$

$$u(t) = -k^T \hat{x}(t) + u_k(t)$$

Dosaďme zákon řízení do rovnic pro systém a rekonstruktor.

Systém:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - bk^T\hat{x}(t) + bu_k(t) + \overbrace{bk^T x(t) - bk^T x(t)}^{0} = \left(A - bk^T\right)x(t) + bu_k(t) - bk^T\varepsilon(t)$$

$$y(t) = c^T x(t)$$

Rekonstruktor:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) - bk^T\hat{x}(t) + bu_k(t) + k^*\left[y(t) - \hat{y}(t)\right] = \left(A - bk^T\right)\hat{x}(t) + bu_k(t) - k^* c^T\varepsilon(t)$$

$$\hat{y}(t) = c^T\hat{x}(t)$$

Z těchto rovnic vidíme, že oba systémy jsou řízeny stavovou zpětnou vazbou a také chybou rekonstrukce. Pokud je asymptotický rekonstruktor stavu stabilní pak platí, že po určité době (závislé na dynamice rekonstruktoru) je chyba rekonstrukce nulová $\varepsilon(t) = 0$ a oba systémy jsou řízeny pouze stavovým regulátorem.

Pro správnou funkci dynamického rekonstruktoru je důležité aby

- vstup systému a vstup rekonstruktoru byly stejné
- model obsažený v rekonstruktoru odpovídal modelu řízeného systému

Příklad:

Navrhněte dynamický kompenzátor pro systém popsaný diferenciální rovnicí

$$\ddot{y}(t)+0.75\dot{y}(t)+3y(t)=3u(t), \quad y(t_0)=\dot{y}(t_0)=0$$

Parametry regulátoru určete s ohledem na požadované umístění pólů uzavřené smyčky $p_{1,2}=-2\pm j\sqrt{2}$.

Řešení:

Zvolíme stavové proměnné

$$\begin{aligned} x_1(t)&=y(t)\\ x_2(t)&=\dot{y}(t)\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}\dot{x}_1(t)&=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)&=-3x_1(t)-0.75x_2(t)+3u(t)\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}\dot{x}(t)&=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -0.75\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)&=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(t)\end{aligned} \quad \begin{aligned}x_1(t_0)&=0\\ x_2(t_0)&=0\end{aligned}$$

Jako první určíme parametry rekonstruktoru

Zvolíme kořeny charakteristického polynomu matice F a vypočteme vektor k^*. Volíme $p_{1,2}$ = -3.

Tedy $\det(pI-F)=\det\left(pI-A+k^*c^T\right)=(p-p_1)(p-p_2)$. Po dosazení

$$\det\left(\begin{bmatrix}p & 0\\ 0 & p\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -0.75\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k_1^* & 0\\ k_2^* & 0\end{bmatrix}\right)=p^2+p\left(0.75+k_1^*\right)+0.75k_1^*+3+k_2^*=p^2+6p+9$$

řešíme dvě rovnice pro dvě neznámé

$$\begin{aligned}0.75+k_1^*&=6\\ 0.75k_1^*+3+k_2^*&=9\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad k^*=\begin{bmatrix}5.25\\ 2.0625\end{bmatrix}$$

Nyní určíme parametry stavového regulátoru, tj. vlastní čísla matice $A-bk^T$ se musí rovnat pólům uzavřené regulační smyčky. Tedy

$$\det\left(pI-A+bk^T\right)=a_z(p)=(p-p_1)(p-p_2)$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0.75 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3k_1 & 3k_2 \end{bmatrix}\right)=\left(p+2+j\sqrt{2}\right)\left(p+2-j\sqrt{2}\right)$$

$$p^2+p\left(0.75+3k_2\right)+3+3k_1=p^2+4p+6$$

řešíme soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé

$$3+3k_1=6$$
$$0.75+3k_2=4$$

$$\Rightarrow \quad k=\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{13}{12} \end{bmatrix}$$

kompenzační zesílení

$$F_u^*(p)=\frac{b(p)}{a_z(p)}=\frac{3}{p^2+4p+6} \quad \Rightarrow \quad k_k=\frac{1}{F_u^*(0)}=2$$

Pro zadaný systém jsme tedy navrhli rekonstruktor stavu

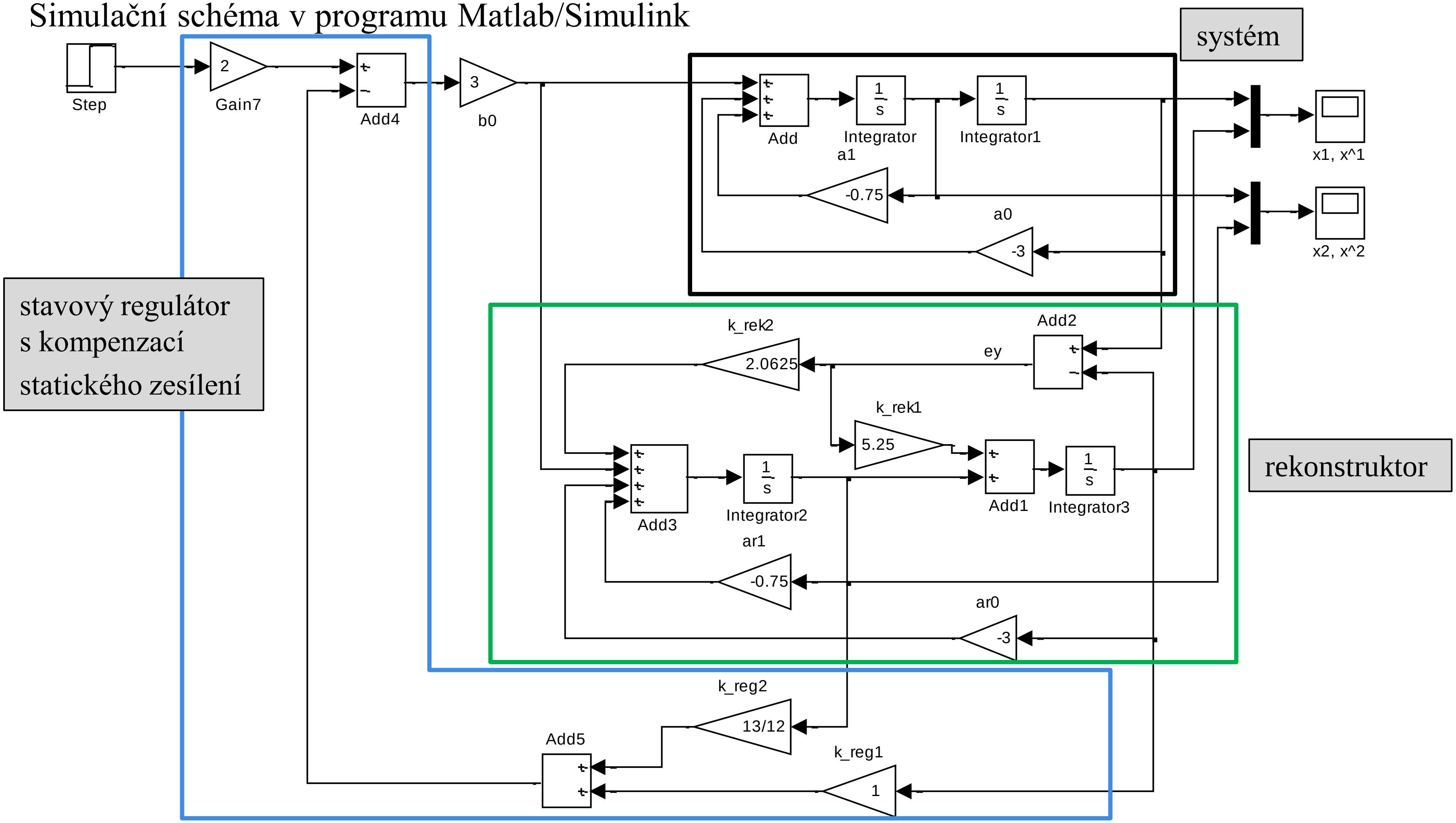
$$\dot{\hat{x}}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0.75 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix} 5.25 \\ 2.0625 \end{bmatrix}\left[y(t)-\hat{y}(t)\right]$$

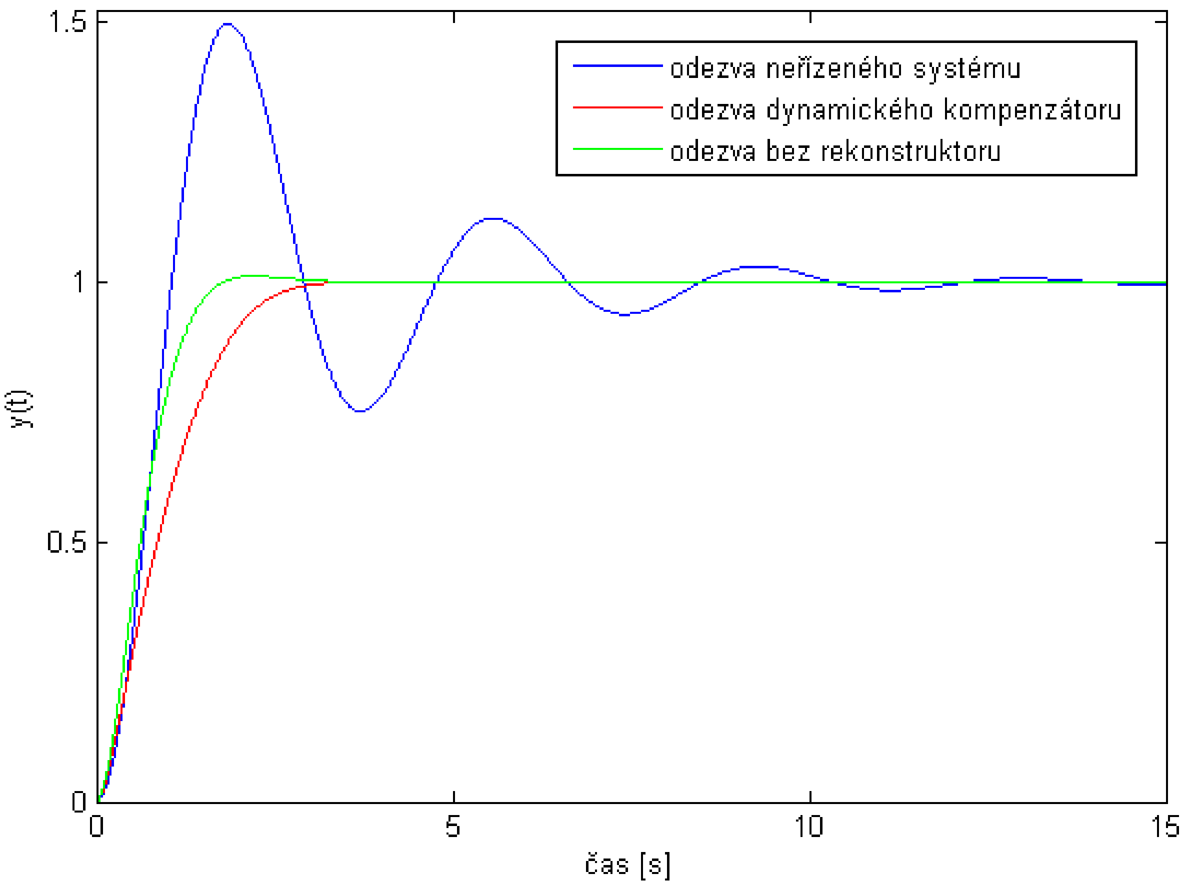
$$\hat{y}(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

a stavový regulátor

$$u(t)=-\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{13}{12} \end{bmatrix}\hat{x}(t)+2w(t)$$

Simulační schéma v programu Matlab/Simulink





1.5
1
0.5
0
0
5
10
15
y(t)
čas [s]
odezva neřízeného systému
odezva dynamického kompenzátoru
odezva bez rekonstruktoru

Zdroje a doporučená literatura

[1] Melichar Jiří – učební texty k předmětu Lineární systémy 1, dostupné na http://www.kky.zcu.cz/uploads/courses/ls1/LS1_Ucebni_texty_2011.pdf

[2] Melichar Jiří – učební texty k předmětu Lineární systémy 2, dostupné na http://www.kky.zcu.cz/uploads/courses/ls2/LS2_Ucebni_texty_2011.pdf

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Poděkování

Tento projekt je spolufinancován
Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

Projekt CZ.1.07/2.2.00/15.0383
Inovace studijního oboru Dopravní a manipulační technika
s ohledem na potřeby trhu práce