Aplikace kybernetiky ve strojírenství

5. Základy simulace dynamických systémů

Ing. Jan Jakl, Ph.D.

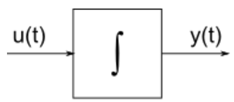
Podpořeno v rámci projektu CZ.1.07/2.2.00/15.0383
Inovace studijního oboru Dopravní a manipulační technika
s ohledem na potřeby trhu práce

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Metody modelování a simulace dynamických systémů

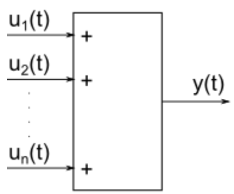
Elementární prvky pro modelování

Integrátor



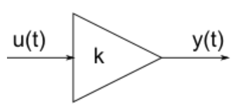
$$y(t) = \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau$$

Součtový člen



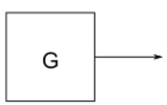
$$y(t) = \sum_{k=1}^{k=n} u_k$$

Zesilovač



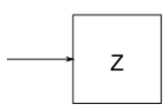
$$y(t) = ku(t)$$

Generátor vstupního signálu



harmonický signál, konstantní signál, jednotkový impuls, jednotkový skok, signál s proměnnou frekvencí, náhodný, schodovitý, pilovitý, periodický.

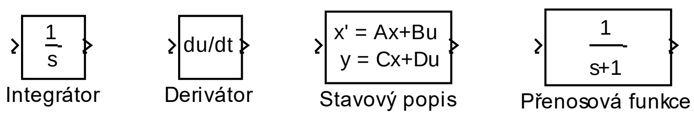
Zobrazovač



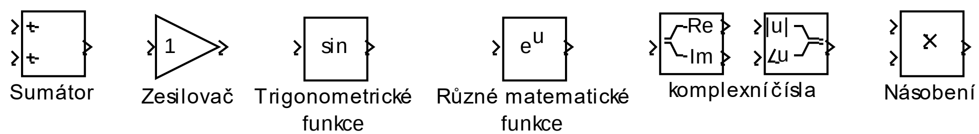
display, graf, xy graf.

Některé základní prvky pro modelování v programovém prostředí Matlab/Simulink

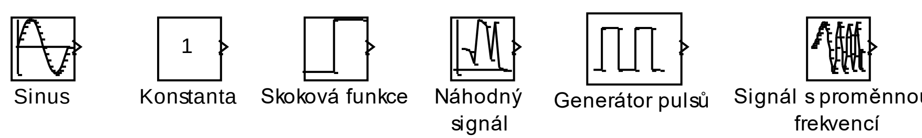
Bloky pro modelování spojitých systémů



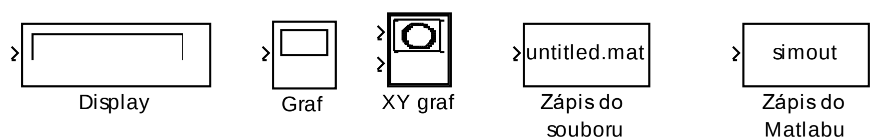
Matematické operace



Generátory vstupního signálu



Prvky pro zobrazení nebo uchování výstupních signálů



Vytvoření simulačního modelu z diferenciální rovnice

Zprvu se budeme zabývat situací, kdy v diferenciální rovnici nevystupují derivace vstupu u(t).

Systém je popsán lineární diferenciální rovnicí n-tého řádu s konstantními koeficienty

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

Postup:

1. Definujme stavové proměnné

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \\ &\vdots \\ x_{n-1}(t) &= y^{(n-2)}(t) \\ x_n(t) &= y^{(n-1)}(t) \end{aligned}$$

Z jejich derivací (podle času) plyne

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{y}(t) = x_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= y^{(n-1)}(t) = x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) &= y^{(n)}(t) \end{aligned}$$

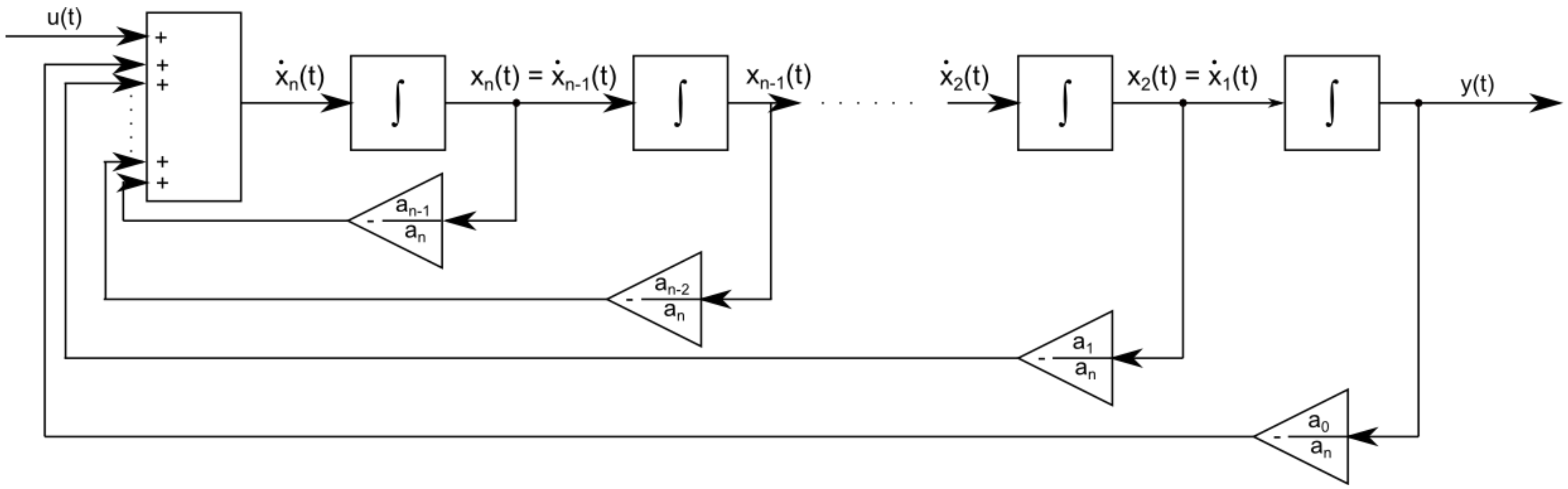
2. Dosadíme jednotlivé proměnné (za jednotlivé derivace y(t)) do diferenciální rovnice a vyjádříme nejvyšší derivaci $y^{(n)}(t)$.

$$y^{(n)}(t) = -\frac{a_{n-1}}{a_n} x_n(t) - \ldots - \frac{a_1}{a_n} x_2(t) - \frac{a_0}{a_n} x_1(t) + \frac{b_0}{a_n} u(t)$$

Nyní už zbývá pouze dosadit $y^{(n)}(t) = \dot{x}_n(t)$, tedy

$$\dot{x}_n(t) = -\frac{a_{n-1}}{a_n} x_n(t) - \ldots - \frac{a_1}{a_n} x_2(t) - \frac{a_0}{a_n} x_1(t) + \frac{b_0}{a_n} u(t)$$

Simulační model



Příklad: Vytvořte simulační model pro systém popsaný lineární diferenciální rovnicí

$$2y^{(4)}(t)+8\dddot{y}(t)+22\ddot{y}(t)+28\dot{y}(t)+20y(t)=20u(t)$$

Postup:

1. Zavedeme proměnné (pomůcka: pro LDR 4. řádu musíme zavést 4. proměnné)

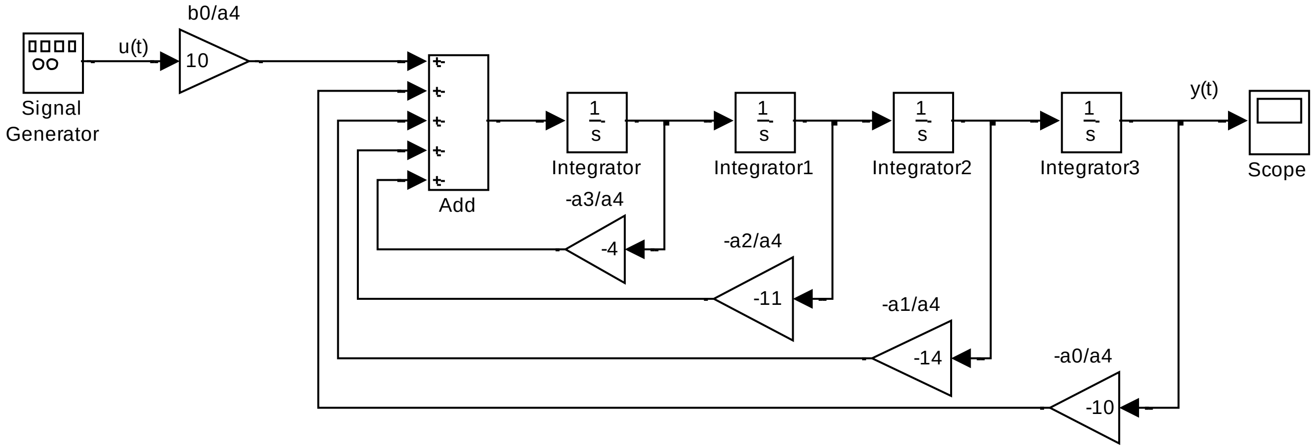
$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \\ x_3(t) &= \ddot{y}(t) \\ x_4(t) &= y^{(3)}(t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{y}(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= y^{(3)}(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) &= y^{(4)}(t) \end{aligned}$$

2. Vyjádříme nejvyšší derivaci $y^{(4)}(t)$ a dosadíme za y(t) a všechny její derivace zavedené proměnné x(t)

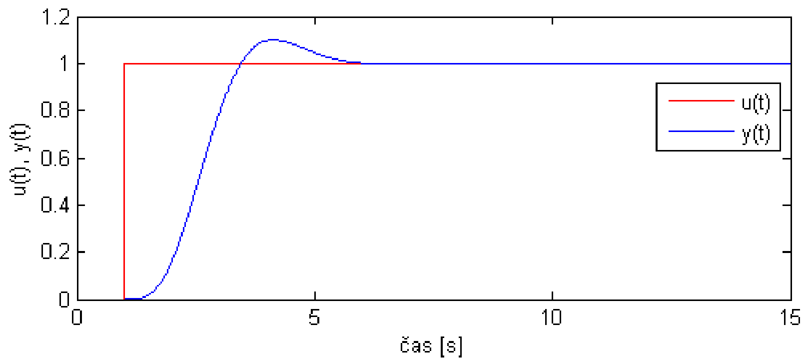
$$\begin{aligned} y^{(4)}(t) &= -4y^{(3)}(t)-11\ddot{y}(t)-14\dot{y}(t)-10y(t)+10u(t) \\ \dot{x}_4(t) &= -4x_4(t)-11x_3(t)-14x_2(t)-10x_1(t)+10u(t) \end{aligned}$$

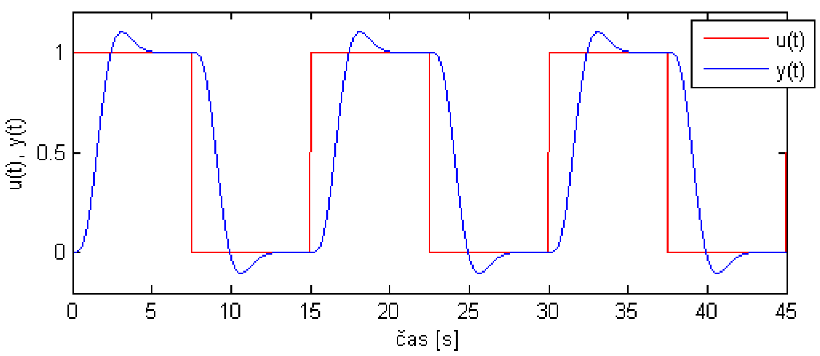
3. Sestavíme simulační model. Základem budou 4 integrátory zapojené v sérii.

4. Simulační schéma v programu Matlab/Simulink



Odezva systému na jednotkový skok





Nyní se budeme zabývat možností, že LDS je popsán diferenciální rovnicí obsahující derivace vstupu u(t)

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \ldots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

Postup:

1. Definujme pomocnou proměnnou z(t), tak aby

$$y(t) = \frac{b_m}{a_n} z^{(m)}(t) + \frac{b_{m-1}}{a_n} z^{(m-1)}(t) + \ldots + \frac{b_1}{a_n} \dot{z}(t) + \frac{b_0}{a_n} z(t)$$

a zároveň

$$u(t) = z^{(n)}(t) + \frac{a_{n-1}}{a_n} z^{(n-1)}(t) + \ldots + \frac{a_1}{a_n} \dot{z}(t) + \frac{a_0}{a_n} z(t)$$

2. Analogicky jako v předchozím případě definujme proměnné

$$\begin{aligned} x_1(t) &= z(t) \\ x_2(t) &= \dot{z}(t) \\ &\vdots \\ x_{n-1}(t) &= z^{(n-2)}(t) \\ x_n(t) &= z^{(n-1)}(t) \end{aligned} \quad \xRightarrow{\frac{dx_i}{dt}} \quad \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{z}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{z}(t) = x_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= z^{(n-1)}(t) = x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) &= z^{(n)}(t) \end{aligned}$$

3. Vyjádříme si derivaci $x_n(t)$ ze vztahu pro u(t), přičemž zaměníme jednotlivé derivace z(t) proměnnými x(t)

$$\dot{x}_n(t) = -\frac{a_{n-1}}{a_n} x_n(t) - \frac{a_{n-2}}{a_n} x_{n-1}(t) - \ldots - \frac{a_1}{a_n} x_2(t) - \frac{a_0}{a_n} x_1(t) + u(t)$$

a zároveň dosadíme příslušné x(t) za derivace z(t) ve vztahu pro výstup systému y(t) ($x_{i+1}(t) = z^{(i)}(t)$)

$$y(t) = \frac{b_m}{a_n} x_{m+1}(t) + \frac{b_{m-1}}{a_n} x_m(t) + \ldots + \frac{b_1}{a_n} x_2(t) + \frac{b_0}{a_n} x_1(t)$$

Tím jsme získali dvě rovnice, které určují jak bude vypadat simulační schéma pro tento typ systému. Vidíme, že první rovnice se shodná s případem, kdy byl systém buzen pouze vstupem u(t) bez derivací. Rozdíl je však v tom, že výstup systému již není roven proměnné $x_1(t)$ ale lineární kombinaci proměnných $x_1(t)$ až $x_m(t)$.

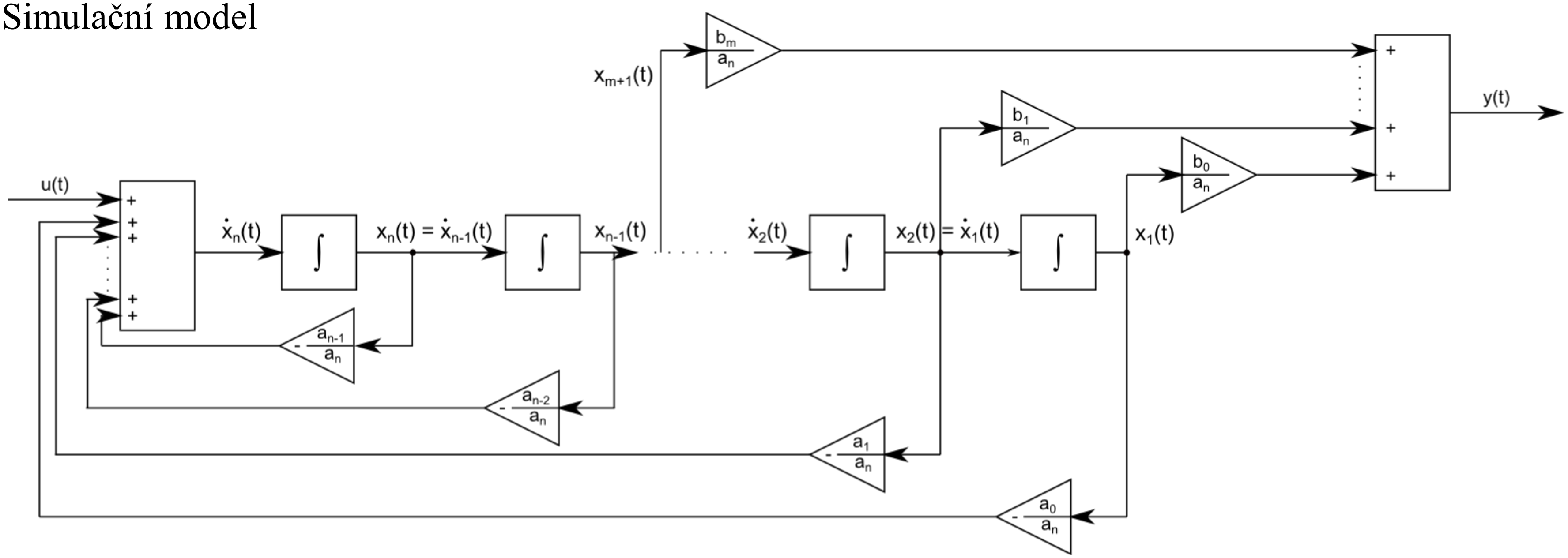
Pozn: Pokud by platilo n = m, pak by rovnice pro výstup systému přešla do tvaru

$$y(t) = \frac{b_n}{a_n} \dot{x}_n(t) + \frac{b_{n-1}}{a_n} x_n(t) + \ldots + \frac{b_1}{a_n} x_2(t) + \frac{b_0}{a_n} x_1(t)$$

Po dosazení za derivaci $x_n(t)$ bychom pak získali výsledný tvar, ze kterého je více patrné přímé působení vstupu systému na jeho výstup

$$y(t) = \frac{b_n}{a_n} u(t) + \frac{b_{n-1} - b_n a_{n-1}}{a_n} x_n(t) + \ldots + \frac{b_1 - b_n a_1}{a_n} x_2(t) + \frac{b_0 - b_n a_0}{a_n} x_1(t)$$

Simulační model



Tento postup pro sestavení simulačního modelu k danému systému není jediný a tentýž systém by tak mohl být popsán také jiným simulačním modelem. Je to stejný případ jako v při určování stavového popisu dynamického systému, kdy k jednomu systému můžeme nalézt (v závislosti na volbě stavových proměnných) nekonečně mnoho stavových reprezentací (obvykle nás však zajímají ty reprezentace u nichž lze stavy systému fyzikálně interpretovat).

Příklad: Vytvořte simulační model pro systém popsaný diferenciální rovnicí

$$2y^{(4)}(t)+8\dddot{y}(t)+22\ddot{y}(t)+28\dot{y}(t)+20y(t)=4\ddot{u}(t)+2\dot{u}(t)+5u(t)$$

Postup

1. Zavedeme proměnnou z(t), která vyhovuje rovnicím

$$y(t)=\frac{b_2}{a_4}\ddot{z}(t)+\frac{b_1}{a_4}\dot{z}(t)+\frac{b_0}{a_4}z(t)$$

$$u(t)=z^{(4)}(t)+\frac{a_3}{a_4}z^{(3)}(t)+\frac{a_2}{a_4}\ddot{z}(t)+\frac{a_1}{a_4}\dot{z}(t)+\frac{a_0}{a_4}z(t)$$

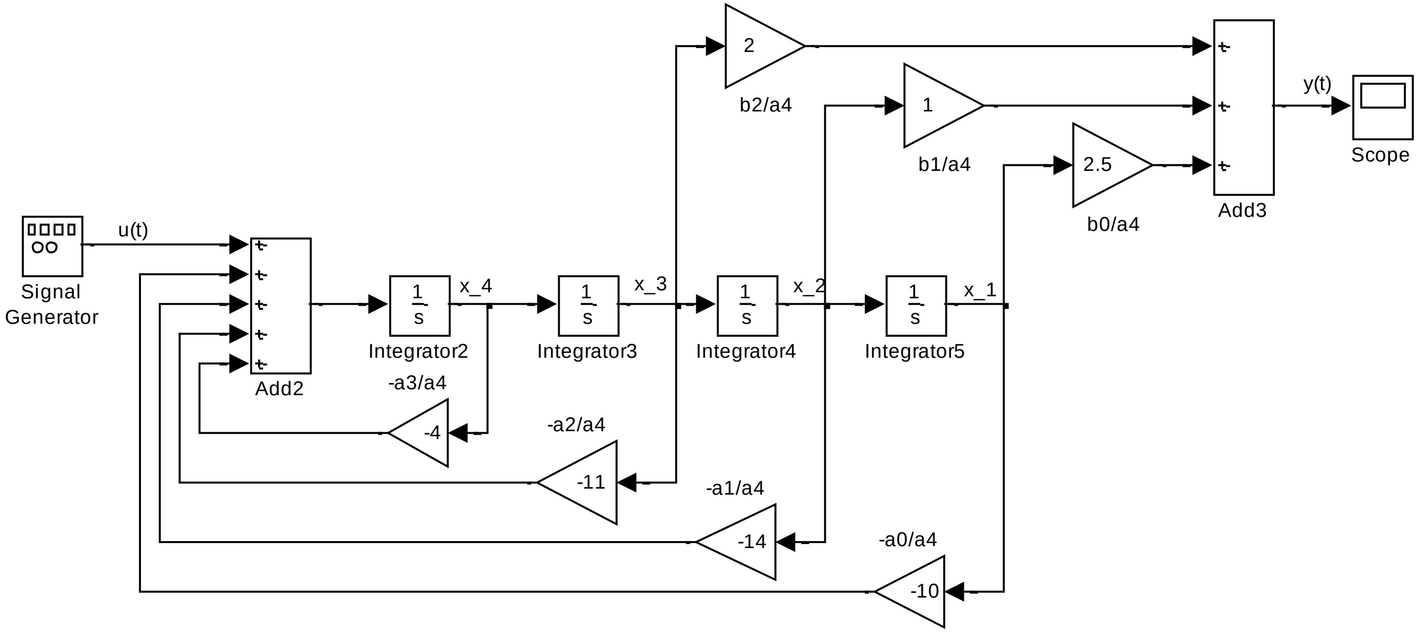
2. Definujme proměnné

$$\begin{aligned} x_1(t)&=z(t)\\ x_2(t)&=\dot{z}(t)\\ x_3(t)&=\ddot{z}(t)\\ x_4(t)&=z^{(3)}(t) \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} \dot{x}_1(t)&=\dot{z}(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)&=\ddot{z}(t)=x_3(t)\\ \dot{x}_3(t)&=z^{(3)}(t)=x_4(t)\\ \dot{x}_4(t)&=z^{(4)}(t) \end{aligned}$$

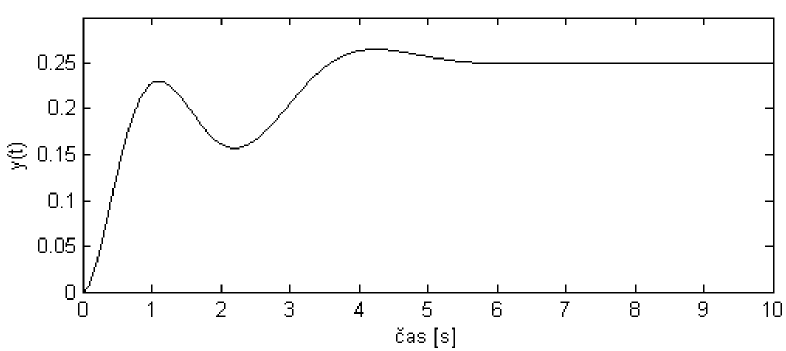
3. Dosadíme proměnné $x_i(t)$ za příslušné derivace z(t) a vyjádříme z rovnice pro vstup systému derivaci $x_4(t)$

$$\dot{x}_4(t)=-4x_4(t)-11x_3(t)-14x_2(t)-10x_1(t)+u(t)$$
$$y(t)=2x_3(t)+x_2(t)+2{,}5x_1(t)$$

4. Simulační schéma v programu Matlab/Simulink



Odezva systému na jednotkový skok



Určení simulačního modelu systému z jeho vnitřního popisu

Pokud známe stavový popis systému, pak jeho rovnice pro jednotlivé složky stavu a výstupu systému určují podobu simulačního modelu pro daný systém.

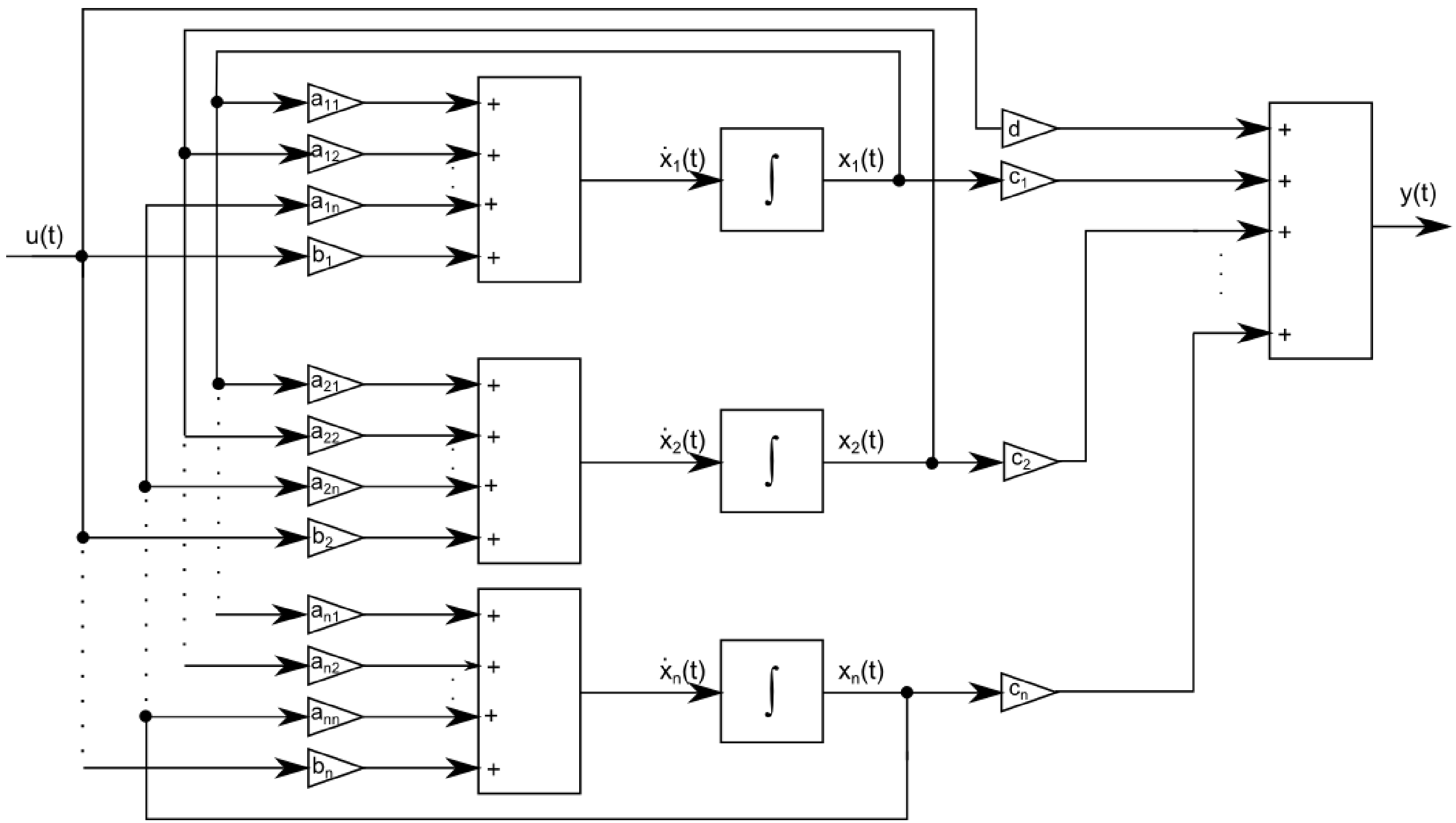
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T + du(t)$$

Rozepsáním stavových rovnic získáme strukturu modelu a výstupní rovnice přímo popisuje výstup systému jako lineární kombinaci stavových proměnných a vstupu

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t) + b_1u(t) \\
\dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t) + b_2u(t) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t) + b_nu(t) \\
y(t) &= c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \ldots + c_nx_n(t) + du(t)
\end{aligned}$$

Simulační model



Příklad: Vytvořte simulační model pro systém určený stavovým popisem

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 9 & 7 \\ -6 & 10 & 8 \\ 5 & -9 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

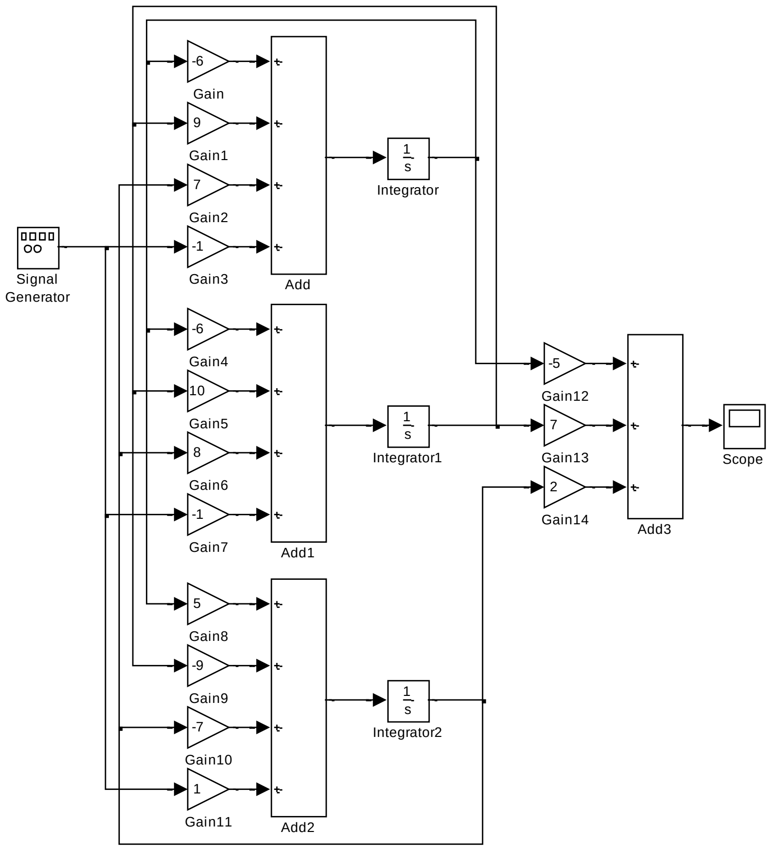
$$y(t) = \begin{bmatrix} -5 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

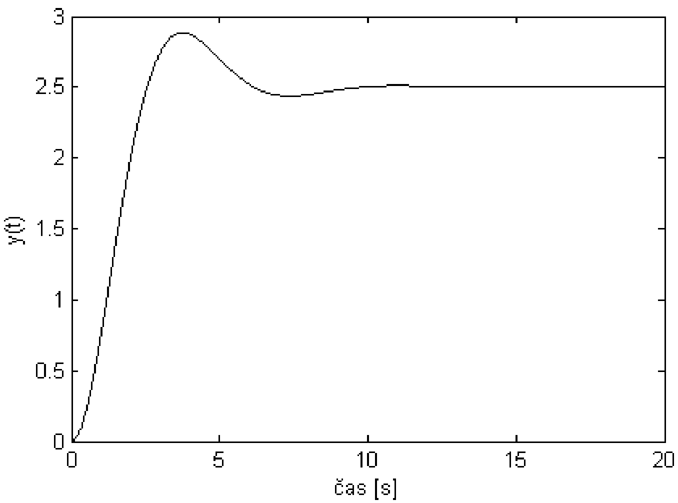
Postup:

1. Rozepíšeme jednotlivé rovnice

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -6x_1(t) + 9x_2(t) + 7x_3(t) - u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -6x_1(t) + 10x_2(t) + 8x_3(t) - u(t) \\ \dot{x}_3(t) &= 5x_1(t) - 9x_2(t) - 7x_3(t) + u(t) \\ y(t) &= -5x_1(t) + 7x_2(t) + 2x_3(t) \end{aligned}$$

2. Simulační schéma v programu Matlab/Simulink





Zdroje a doporučená literatura

F. Tůma: Kybernetika, skripta, ZČU v Plzni

S. Kubík a kol.: Teorie automatického řízení I

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Poděkování

Tento projekt je spolufinancován
Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

Projekt CZ.1.07/2.2.00/15.0383
Inovace studijního oboru Dopravní a manipulační technika
s ohledem na potřeby trhu práce