Aplikace kybernetiky ve strojírenství

4. Algebra blokových schémat, vnitřní popis LDS

Ing. Jan Jakl, Ph.D.

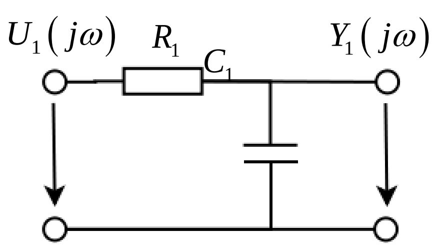
Podpořeno v rámci projektu CZ.1.07/2.2.00/15.0383
Inovace studijního oboru Dopravní a manipulační technika
s ohledem na potřeby trhu práce

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

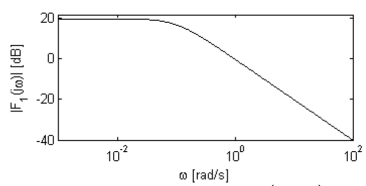
Algebra blokových schémat

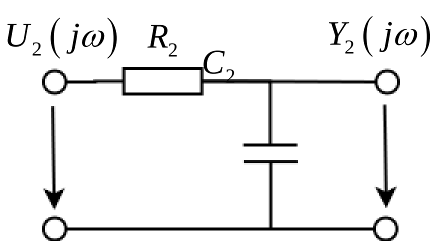
Systémy automatického řízení se zpravidla skládají z většího množství subsystémů spojených informačními vazbami. Pro popis vlivu zapojení jednotlivých subsystémů lze použít algebru blokových schémat. Bloková schémata slouží ke znázornění kauzálních závislostí (příčina-následek) pomocí orientovaných (informačních) vazeb mezi jednotlivými bloky (subsystémy). Pomocí algebry blokových schémat lze zjednodušovat složitá schémata (popsat spojení několika přenosových funkcí pomocí jednoho přenosu) nebo naopak dekomponovat přenosovou funkci většího systému na jednodušší členy.

Kdy to funguje:

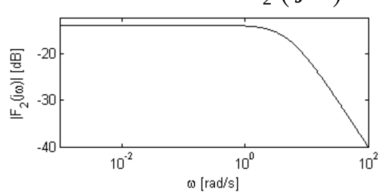


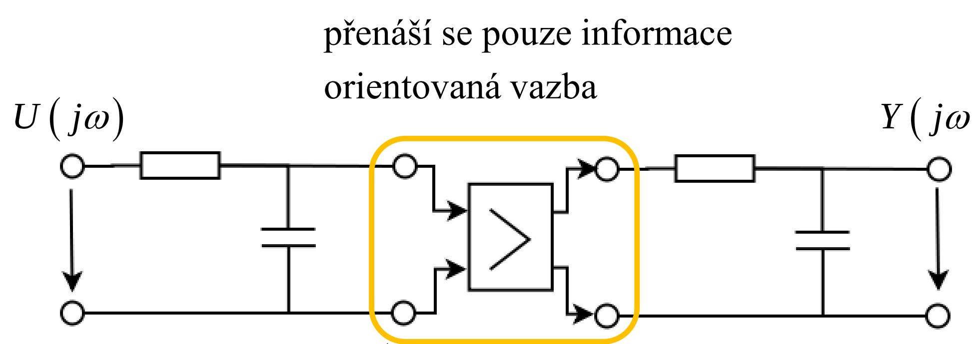
$$F_1(j\omega) = \frac{Y_1(j\omega)}{U_1(j\omega)}$$



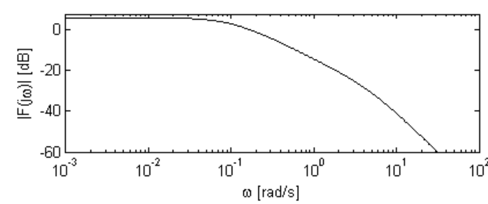


$$F_2(j\omega) = \frac{Y_2(j\omega)}{U_2(j\omega)}$$



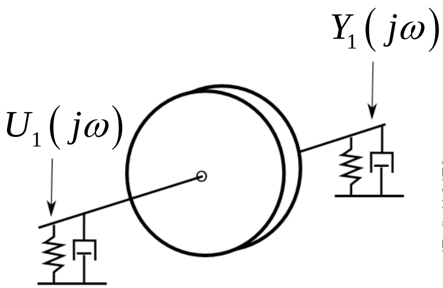


$$F(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = F_1(j\omega)F_2(j\omega)$$

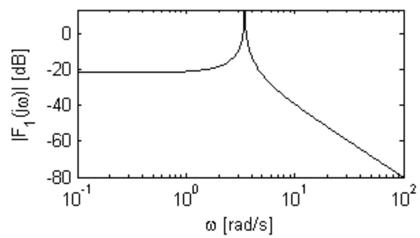


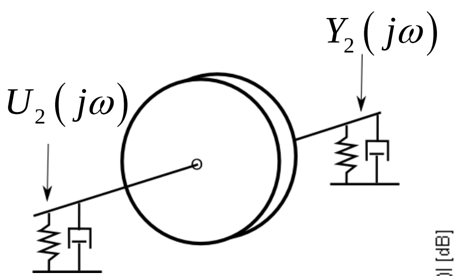
Algebra blokových schémat

Kdy to nefunguje:

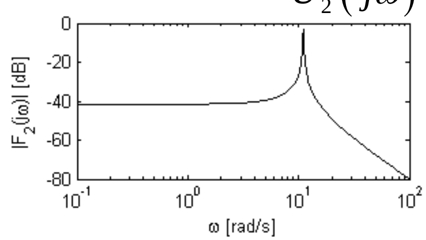


$$F_1(j\omega) = \frac{Y_1(j\omega)}{U_1(j\omega)}$$

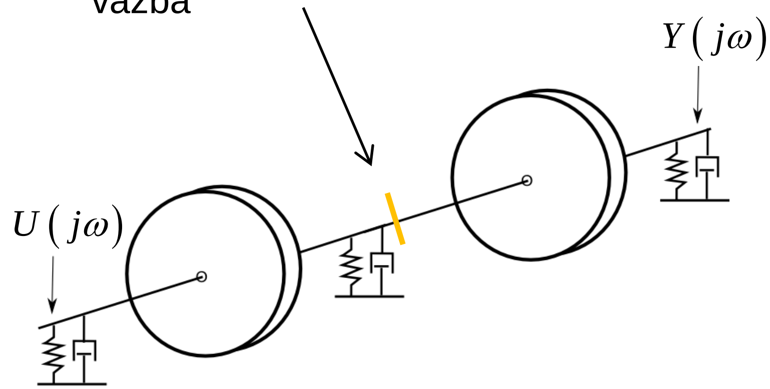




$$F_2(j\omega) = \frac{Y_2(j\omega)}{U_2(j\omega)}$$

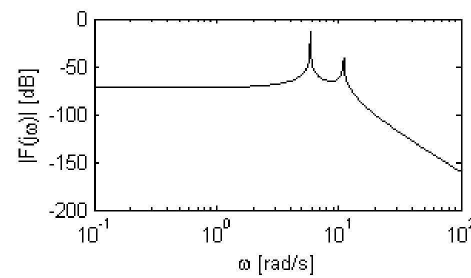


Toto není informační vazba



Pozor!!!

$$F(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} \neq F_1(j\omega) F_2(j\omega)$$



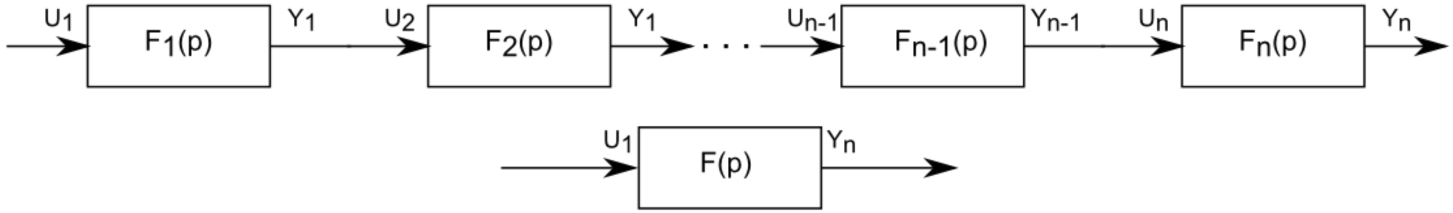
Algebra blokových schémat

Základní typy zapojení subsystémů pomocí informačních vazeb:

- *Sériové*
- *Paralelní*
- *Zpětnovazební*

Algebra blokových schémat

Sériové zapojení



Ze schématu plyne, že

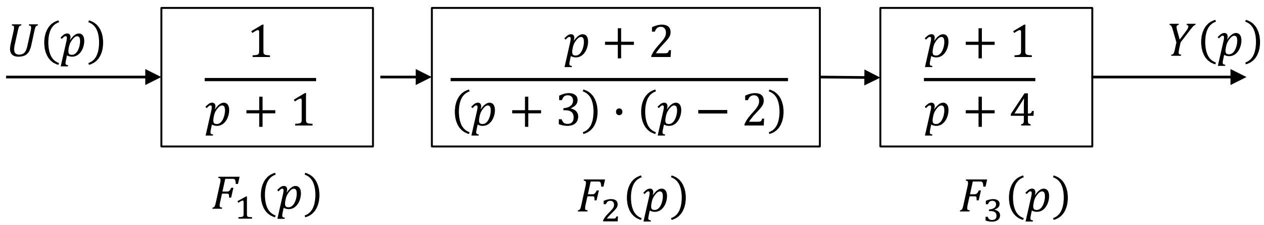
$$Y_n(p) = F_n(p) \cdot U_n(p) = F_n(p) \cdot Y_{n-1}(p) = F_n(p) \cdot F_{n-1}(p) \cdot U_{n-1}(p) = \dots = \prod_{k=1}^{k=n} F_k(p) U_1(p)$$

Celkový přenos je tedy dán součinem dílčích přenosových funkcí

$$F(p) = \prod_{k=1}^{k=n} F_k(p)$$

Sériové zapojení

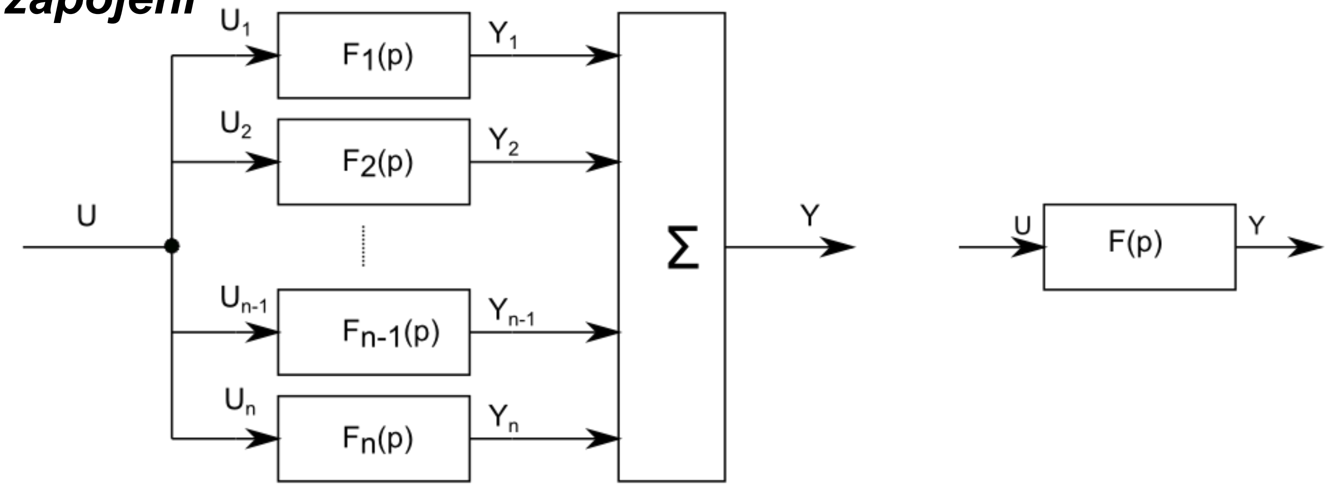
Příklad: Určete výsledný obrazový přenos následujícího zapojení



$$F(p) = F_1(p) \cdot F_2(p) \cdot F_3(p) = \frac{1}{p+1} \cdot \frac{p+2}{(p+3)\cdot(p-2)} \cdot \frac{p+1}{p+4} = \frac{p+2}{(p-2)\cdot(p+3)\cdot(p+4)}$$

Algebra blokových schémat

Paralelní zapojení



Výstup systému je dán součtem výstupů z jednotlivých subsystémů

$$Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{n-1} + Y_n = F_1(p)U_1 + F_2(p)U_2 + \ldots + F_{n-1}(p)U_{n-1} + F_n(p)U_n$$

Jelikož U = U_1 = U_2 = …=U_{n-1} = U_n, pak je celkový přenos dán součtem dílčích přenosů

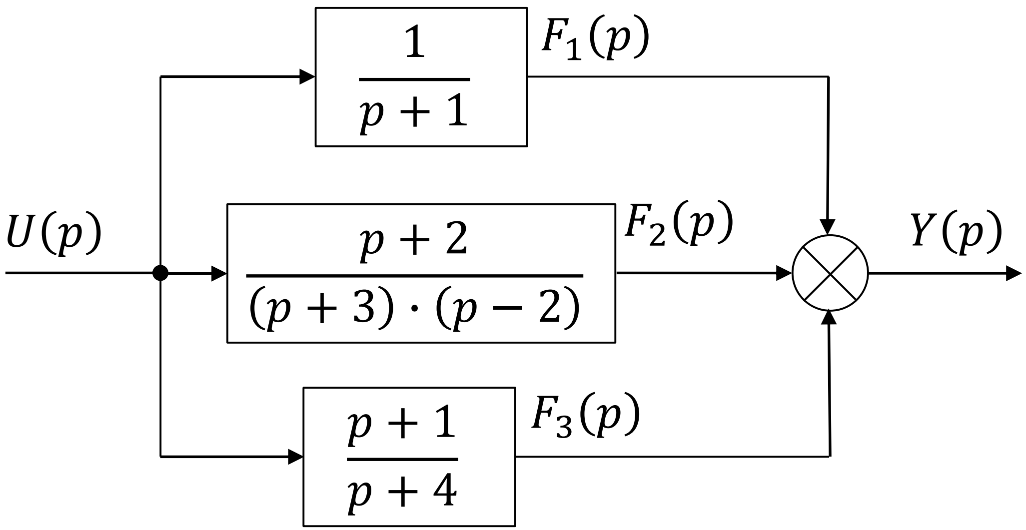
$$Y = \left[F_1(p) + F_2(p) + \ldots + F_{n-1}(p) + F_n(p)\right]U = \sum_{k=1}^{k=n} F_k(p)U$$

$$F(p) = \sum_{k=1}^{k=n} F_k(p)$$

Algebra blokových schémat

Paralelní zapojení

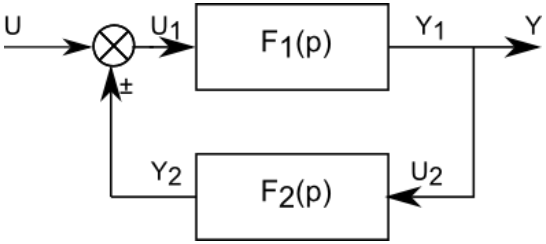
Příklad: Určete výsledný obrazový přenos následujícího zapojení



$$F(p) = F_1(p) + F_2(p) + F_3(p) = \frac{1}{p+1} + \frac{p+2}{(p+3)\cdot(p-2)} + \frac{p+1}{p+4}$$

$$= \frac{(p+3)\cdot(p-2)\cdot(p+4) + (p+1)\cdot(p+2)\cdot(p+4) + (p+1)\cdot(p-2)\cdot(p+3)\cdot(p+4)}{(p+2)\cdot(p-2)\cdot(p+3)\cdot(p+4)}$$

Zpětnovazební zapojení



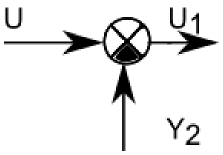
Pro jednotlivé výstupy platí vztahy

$$Y = Y_1 = F_1(p) \cdot U_1(p) = F_1(p) \cdot (U \pm Y_2)$$
$$Y_2 = F_2(p) \cdot U_2 = F_2(p) \cdot Y$$

Dosadíme-li výraz pro Y2 z druhé rovnice do první, získáme konečný tvar

$$Y = F_1(p) \cdot \left[U \pm F_2(p) Y \right] => Y = \frac{F_1(p)}{1 \mp F_1(p) \cdot F_2(p)} U$$
$$F(p) = \frac{F_1(p)}{1 \mp F_1(p) \cdot F_2(p)}$$

Pozn.: místo záporného znaménka u záporné zpětné vazby se používá černě vybarvená výseč kruhu.

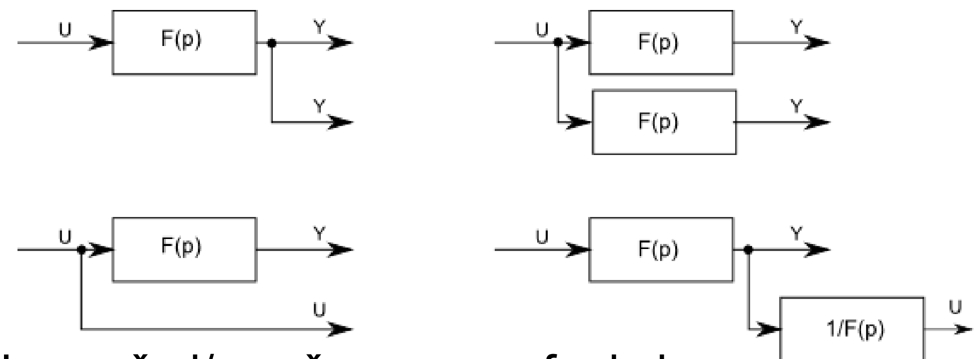


Algebra blokových schémat

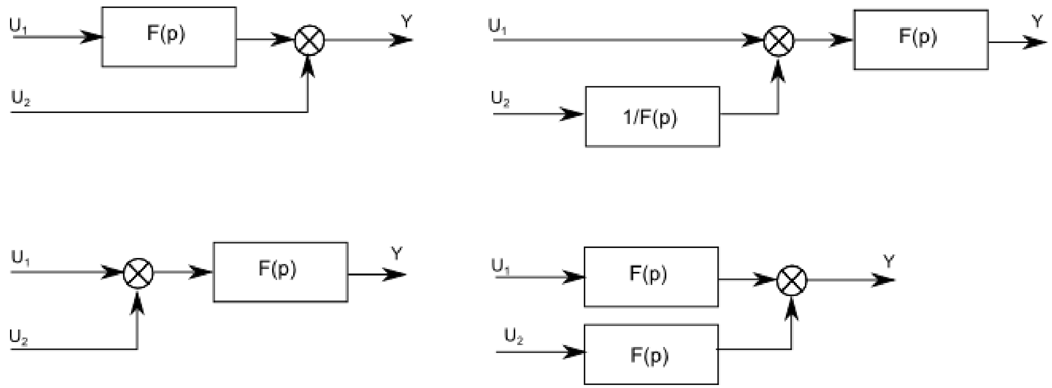
Modifikace blokového schématu

V některých případech je vhodné blokové schéma upravit. K tomu slouží poučky o přesunu uzlu
nebo součtového členu.

Přesun uzlu před/za přenosovou funkci:

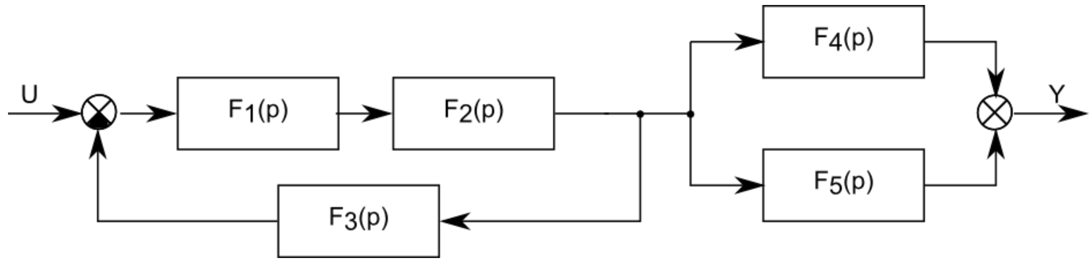


Přesun součtového členu před/za přenosovou funkci :

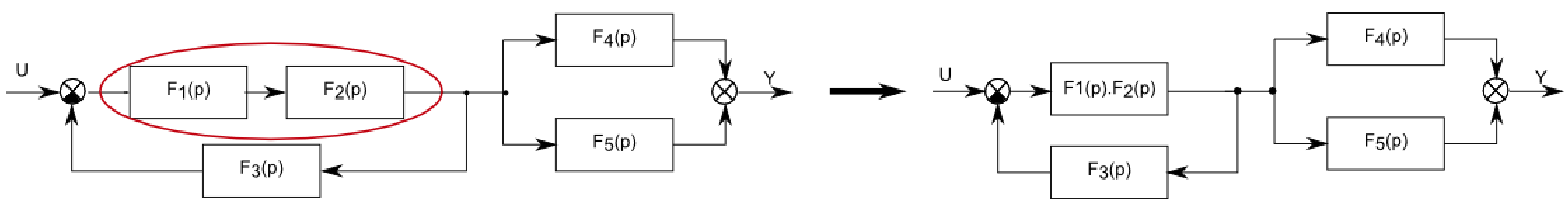


Algebra blokových schémat

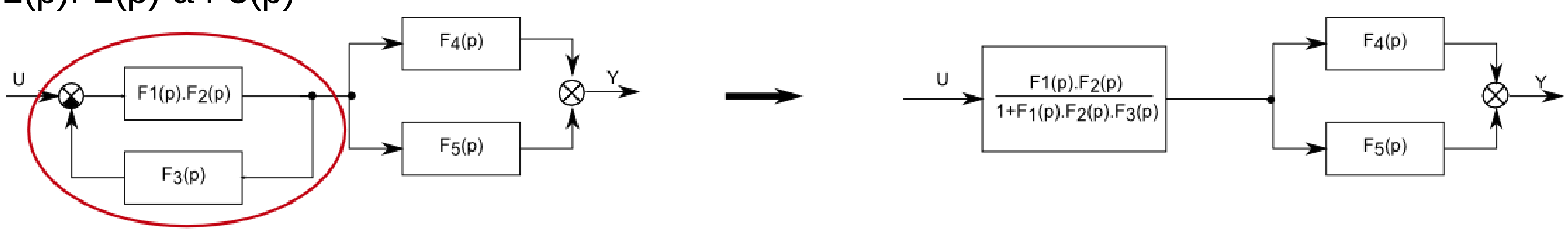
Příklad:
Upravte blokové schéma a určete celkový přenos systému.



Při řešení využijeme pravidel sériového, zpětnovazebního i paralelního zapojení.
Krok 1: Určíme přenos sériového zapojení přenosů F1(p) a F2(p)

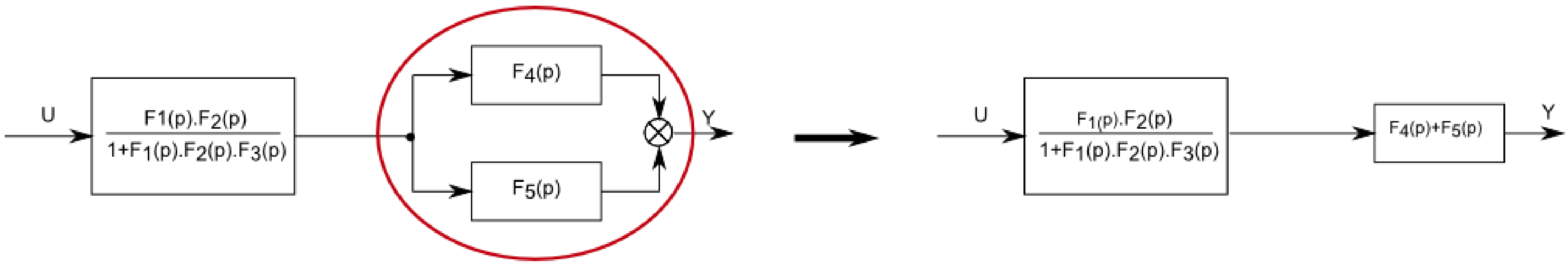


Krok 2: Určíme přenos zpětnovazebního zapojení se zápornou zpětnou vazbou přenosů F1(p)F2(p) a F3(p)

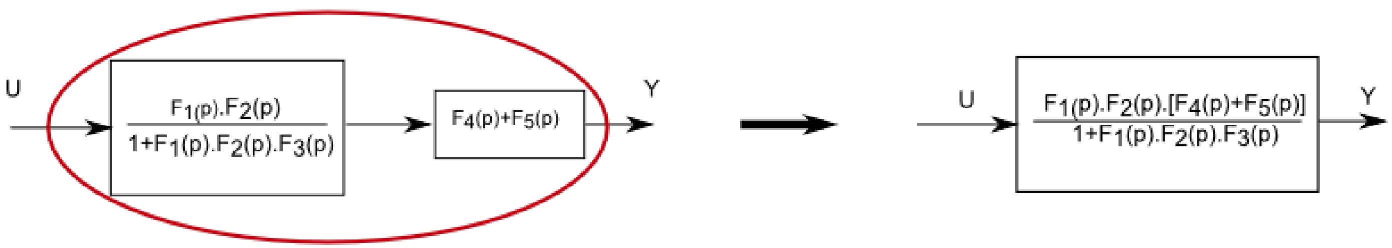


Algebra blokových schémat

Krok 3: Určíme přenos paralelního zapojení přenosů F4(p) a F5(p)



Krok 4: Určíme výsledný přenos daný sériovým zapojením dvou přenosů.



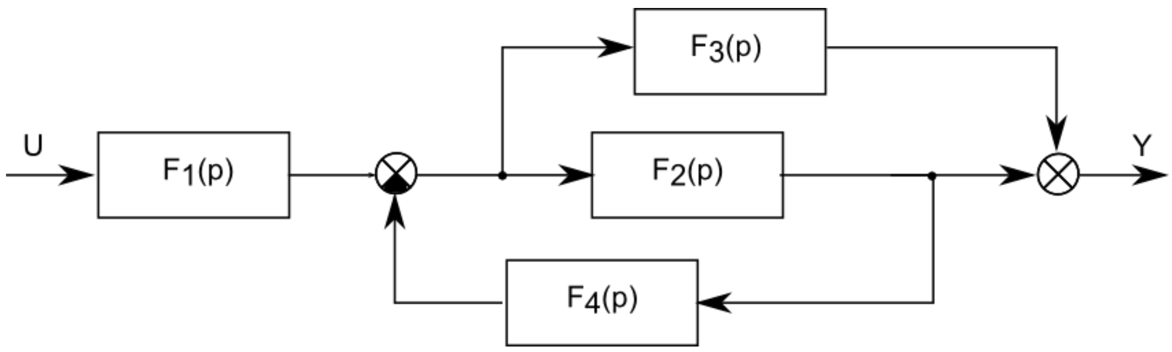
Celkový přenos systému je tedy dán vztahem

$$F(p) = \frac{F_1(p) \cdot F_2(p) \cdot \left[F_4(p) + F_5(p) \right]}{1 + F_1(p) \cdot F_2(p) \cdot F_3(p)}$$

Algebra blokových schémat

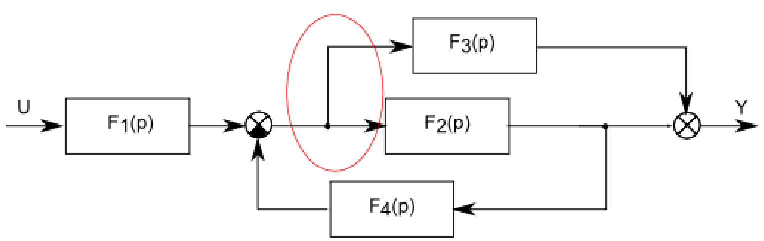
Příklad:

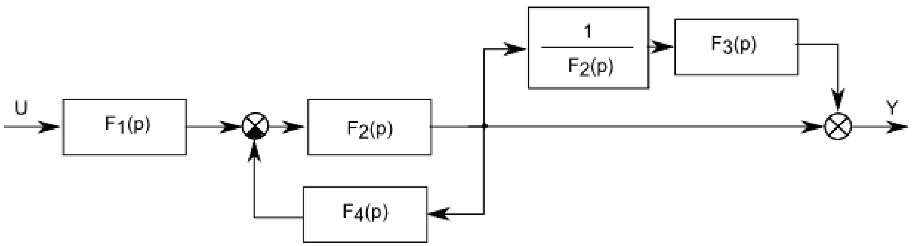
Upravte blokové schéma a určete celkový přenos systému.



Při řešení využijeme stejných pravidel jako v předchozím příkladu a zároveň pravidla pro přemístění uzlu za přenos.

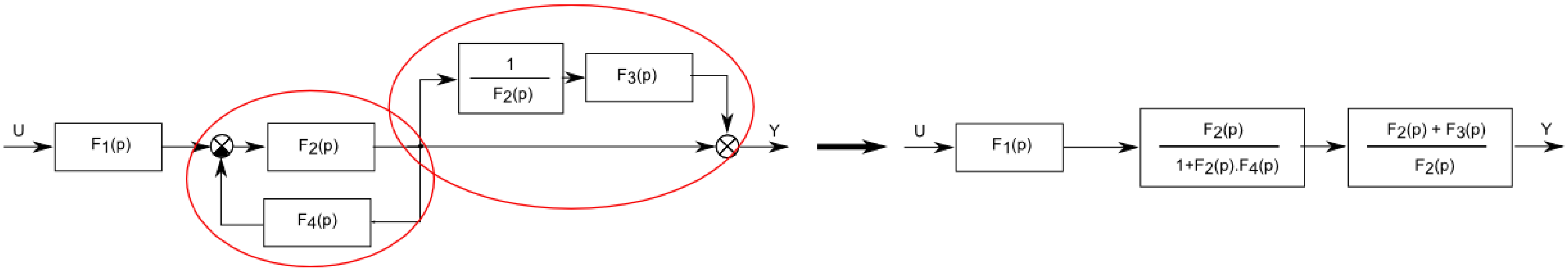
Krok 1: První uzel umístíme za přenos F2(p)



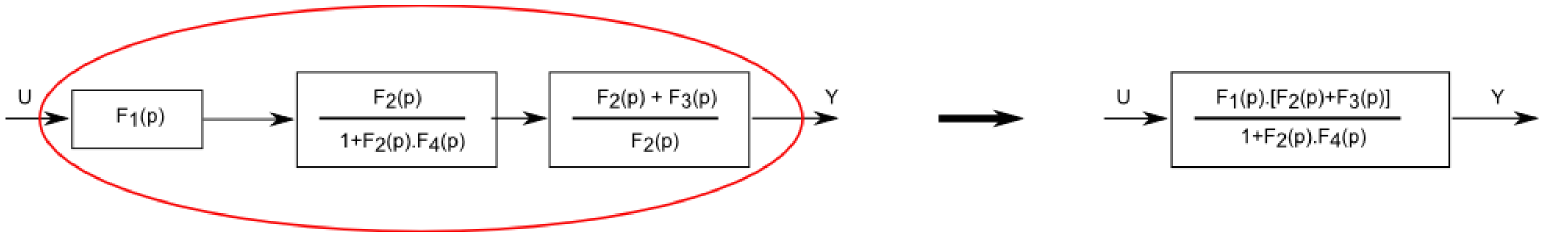


Algebra blokových schémat

Krok 2: Určíme přenos zpětnovazební smyčky a také přenos sério-paralelního zapojení.



Krok 3: Určíme výsledný přenos daný sériovým zapojením tří přenosů.



Celkový přenos je tedy dán vztahem

$$F(p) = \frac{F_1(p) \cdot \left[F_2(p) + F_3(p) \right]}{1 + F_2(p) \cdot F_4(p)}$$

Vnitřní popis LDS

Vnitřní popis dynamických systémů

Již známé možnosti popisu vlastností dynamických systémů (diferenciální rovnice, impulsní a přechodová funkce, obrazový a frekvenční přenos, frekvenční charakteristiky nebo rozložení pólů a nul systému) se řadí mezi vnější popisy systému, jelikož popisují pouze závislost mezi vstupem a výstupem systému. Pozorovatel nahlíží na systém jako na černou krabičku (black box) a sleduje pouze jeho vstupy a výstupy. Detailnější pohled na chování systému dává vnitřní popis, který kromě vstupu a výstupu zohledňuje také stav systému. V obecném případě se k popisu dynamických systémů používají nelineární diferenciální rovnice n-tého řádu. Pro jednoduchost se dále omezíme pouze na lineární systémy s konstantními parametry (t-invariantní) LTI, které lze popsat lineární diferenciální rovnici n-tého řádu s konstantními koeficienty.

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \ldots + b_0 u(t)$$

Pomocí vhodně zvolených stavových proměnných lze lineární diferenciální rovnici n-tého řádu převést na soustavu n lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu a na výstupní rovnici, která popisuje závislost výstupu daného systému na stavových proměnných a případně také na vstupu systému.

Vnitřní popis LDS

Uvažujme m = 0 a následující volbu stavových proměnných:

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= y(t) \\
x_2(t) &= \dot{y}(t) \\
x_3(t) &= \ddot{y}(t) \\
&\vdots \\
x_{n-1}(t) &= y^{(n-2)}(t) \\
x_n(t) &= y^{(n-1)}(t)
\end{aligned}
$$

zderivujme stavové proměnné podle času

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= \dot{y}(t) = x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= \ddot{y}(t) = x_3(t) \\
\dot{x}_3(t) &= \dddot{y}(t) = x_4(t) \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1}(t) &= y^{(n-1)}(t) = x_n(t) \\
\dot{x}_n(t) &= y^{(n)}(t) = ?
\end{aligned}
$$

Vztah pro $\dot{x}_n(t)$ vyjádříme z diferenciální rovnice:

$$
y^{(n)}(t) = -\frac{a_{n-1}}{a_n} y^{(n-1)}(t) - \frac{a_{n-2}}{a_n} y^{(n-2)}(t) - \ldots - \frac{a_1}{a_n} \dot{y}(t) - \frac{a_0}{a_n} y(t) + \ldots + \frac{b_0}{a_n} u(t)
$$

$$
\dot{x}_n(t) = -\frac{a_{n-1}}{a_n} x_n(t) - \frac{a_{n-2}}{a_n} x_{n-1}(t) - \ldots - \frac{a_1}{a_n} x_2(t) - \frac{a_0}{a_n} x_1(t) + \ldots + \frac{b_0}{a_n} u(t)
$$

Vnitřní popis LDS

Maticový zápis rovnic derivací stavových proměnných a výstupu systému:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \cdots & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b_0}{a_n} \end{bmatrix}}_{b} \cdot u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{c^T} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Vnitřní popis LDS

Stavová reprezentace lineárního dynamického systému s r vstupy a p výstupy

$$\begin{array}{ll} \text{stavová rovnice} & \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ \text{výstupní rovnice} & y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{array}$$

x(t) – stavový vektor řádu n
y(t) – vektor výstupů systému řádu p
u(t) – řídicí (vstupní) vektor systému řádu r
A – matice dynamiky systému rozměru nxn
B – vstupní matice rozměru nxr
C – výstupní matice rozměru pxn
D – matice přímého působení vstupu na výstup rozměru kxm

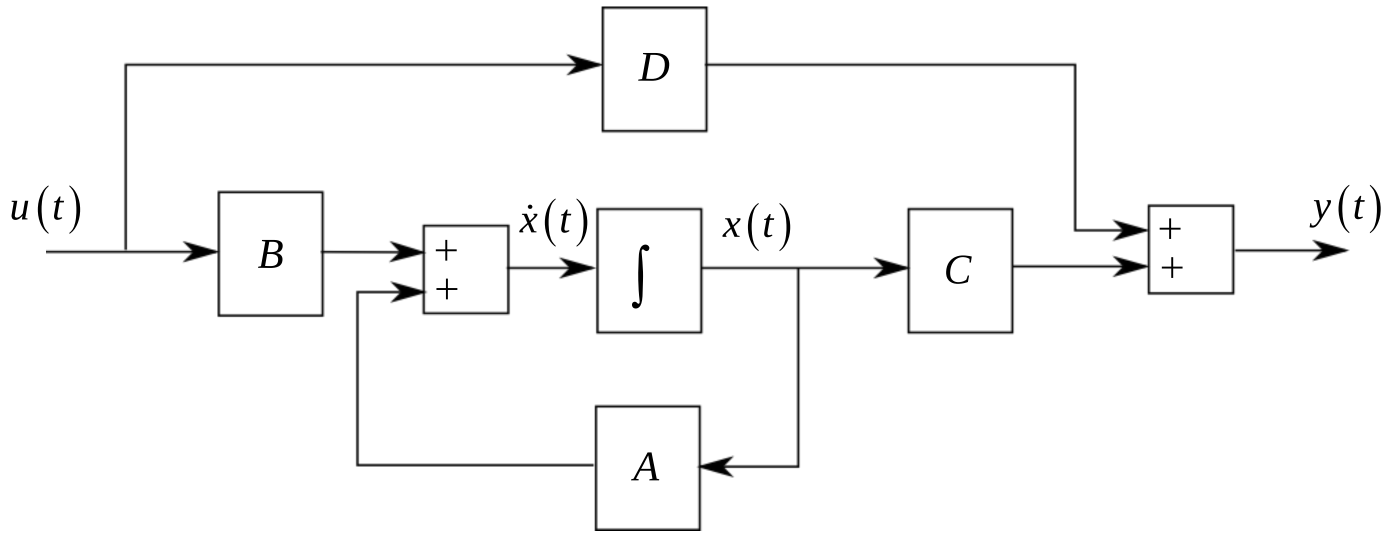
Pro systémy s jedním vstupem a výstupem (r=p=1) pak tato reprezentace nabývá tvaru

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$
$$y(t) = c^T x(t) + du(t)$$

Pozn: jestliže je relativní řád systému $n_r \geq 1$, pak d = 0.

Vnitřní popis LDS

Schématické znázornění stavové reprezentace



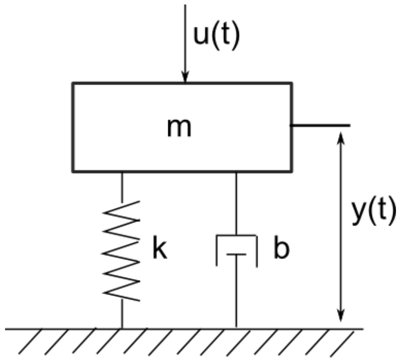
Převod mezi vnějším a vnitřním popisem není jednoznačný, tzn. že pro daný systém popsaný diferenciální rovnicí můžeme na základě volby stavových proměnných (mohou být abstraktní nebo mohou mít fyzikální význam) nalézt různé stavové reprezentace, které budou mít stejnou strukturu, ale budou se lišit jejich matice A, B, C a D.

Vnitřní popis LDS

Příklady určení vnitřního popisu reálných systémů:

Model tlumiče

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu:



$$m\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + ky(t) = u(t)$$

Zvolme stavové proměnné $x_1(t) = y(t)$ a $x_2(t) = dy(t)/dt$.
Tím získáme dvě diferenciální rovnice prvního řádu

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{m}x_1(t) - \frac{b}{m}x_2(t) + \frac{u(t)}{m}$$

Předchozí soustavu rovnic zapíšeme v maticovém tvaru a doplníme ji výstupní rovnici (výstupem je $x_1(t)$). Získáme tak stavový popis systému

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

Vnitřní popis LDS

Model rotujícího nevývažku

Pohyb středu kotouče S v závislosti na odstředivé síle ve směrech x a y popisuje soustava dvou diferenciálních rovnic druhého řádu

$$m\ddot{x}_s(t)+b_x\dot{x}_s(t)+k_x x_s(t)=m_n r\omega^2\cos(\omega t+\beta)$$
$$m\ddot{y}_s(t)+b_y\dot{y}_s(t)+k_y y_s(t)=m_n r\omega^2\sin(\omega t+\beta),$$

Označme si jednotlivé vstupy a zaveďme stavové proměnné:

$$u_1(t)=m_n r\omega^2\cos(\omega t+\beta)$$
$$u_2(t)=m_n r\omega^2\sin(\omega t+\beta)$$

systém s více vstupy

$$z_1(t)=x_s(t)$$
$$z_2(t)=\dot{x}_s(t)$$
$$z_3(t)=y_s(t)$$
$$z_4(t)=\dot{y}_s(t)$$

$$\Rightarrow$$

$$\dot{z}_1(t)=\dot{x}_s(t)=z_2(t)$$
$$\dot{z}_2(t)=\ddot{x}_s(t)=-\frac{k_x}{m}z_1(t)-\frac{b_x}{m}z_2(t)+\frac{1}{m}u_1(t)$$
$$\dot{z}_3(t)=\dot{y}_s(t)=z_4(t)$$
$$\dot{z}_4(t)=\ddot{y}_s(t)=-\frac{k_y}{m}z_3(t)-\frac{b_y}{m}z_4(t)+\frac{1}{m}u_2(t)$$

Vnitřní popis LDS

Stavová rovnice

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \\ \dot{z}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_x}{m} & -\frac{b_x}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{k_y}{m} & -\frac{b_y}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

Výstupní rovnice:

sledujeme výchylky středu kotouče ve směrech x a y nezávisle

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} z(t)$$

sledujeme celkovou výchylku středu kotouče v rovině xy

$$y(t) = h(z(t)) = \sqrt{z_1^2(t) + z_3^2(t)} \qquad \boxed{\text{nelineární systém}}$$

Vnitřní popis LDS

Řešení stavové rovnice

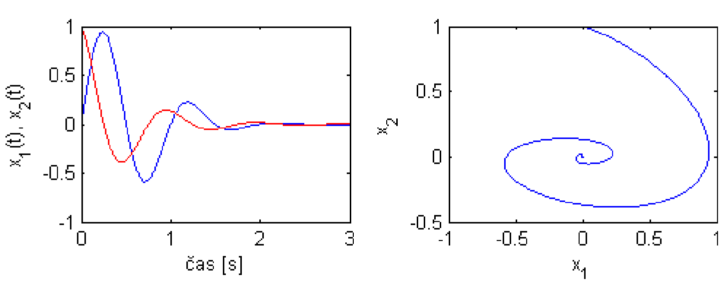
Uvažujme stavový popis lineárního dynamického systému ve tvaru

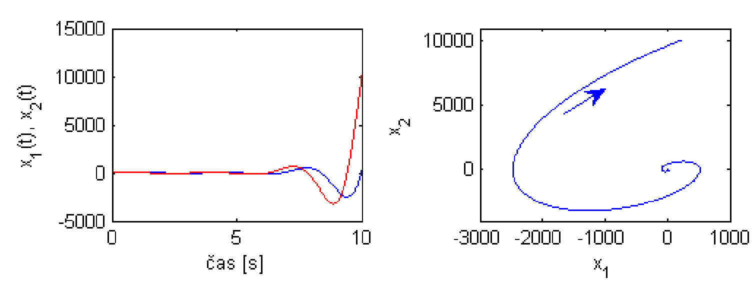
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Pak řešením stavové rovnice je dáno

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

kde t0 je počáteční čas a x(t0) je počáteční vektor stavu. První člen řešení můžeme interpretovat jako odezvu na počáteční podmínky při nulovém vstupu a druhý člen jako odezvu systému na vstup u(t). Chování dynamického systému lze popsat časovým vývojem složek stavu, nebo trajektorií systému (průběhem složek stavu ve stavovém prostoru (při vyloučení času)). Stavovému prostoru se také říká fázová rovina a trajektorii systému fázový portrét.



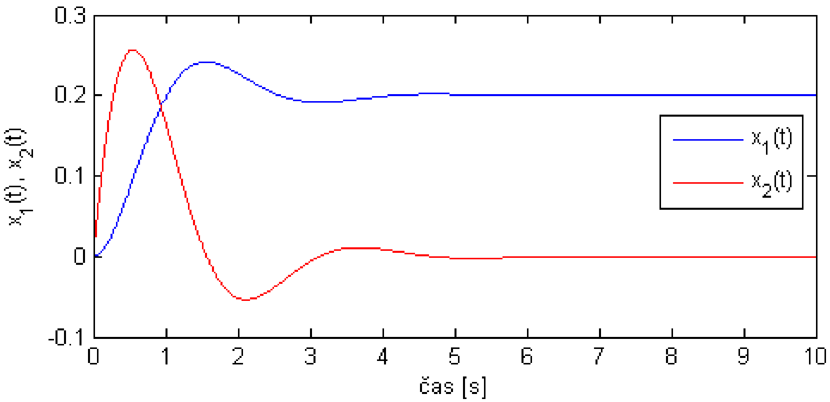


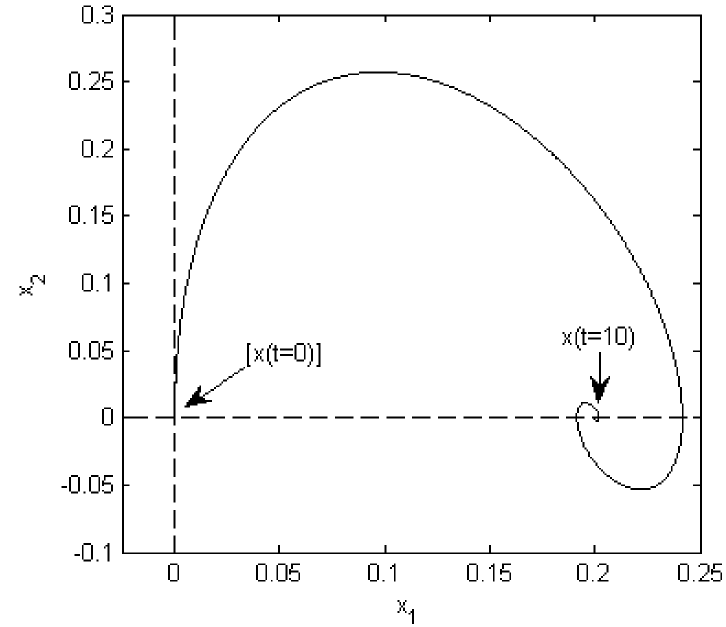
Vnitřní popis LDS

Jako první z příkladů určení stavového popisu reálného systému byl použit model tlumiče. Uvažujme nyní jeho stavový popis, přičemž stavové proměnné jsou voleny x1(t) = y(t) a x2(t) = dy(t)/dt, tj. dráha a rychlost hmoty na tlumiči. Připomeňme stavový popis tohoto systému. Na obrázku je časový průběh obou složek stavu systému při vybuzení systému jednotkovým skokem (předpokládejme, že parametry systému jsou m=1, b=2, k=5).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$





Vnitřní popis LDS

Typy stavových reprezentací dynamických systémů

Na příkladech bylo ukázáno, že k jednomu systému je možné určit v závislosti na volbě stavových proměnných více stavových reprezentací (ve skutečnosti nekonečně mnoho). Existují však takové, které mají v kybernetice důležité postavení. V dalším předpokládejme, že systém je popsán lineární diferenciální rovnicí n-tého řádu

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_0 y(t)=b_m u^{(m)}(t)+b_{m-1}u^{(m-1)}(t)+\ldots+b_0 u(t)$$

Frobeniova stavová reprezentace

$$\dot{\overline{x}}(t)=\overline{A}_f\overline{x}(t)+\overline{b}_f u(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}\overline{x}(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}u(t)$$

platí pro systémy kde n > m, D = 0;

jednoduchý převod

$$y(t)=\overline{c}_f^T\overline{x}(t)=\begin{bmatrix}\overline{b}_0 & \ldots & \overline{b}_{n-1}\end{bmatrix}\overline{x}(t)$$

Vnitřní popis LDS

Normální forma řiditelnosti

$$\dot{\bar{x}}(t)=\bar{A}_ř\bar{x}(t)+\bar{b}_ř u(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & -a_0\\ 1 & 0 & \cdots & -a_1\\ \vdots & \ddots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1}\end{bmatrix}\bar{x}(t)+\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\bar{c}_ř^T\bar{x}(t)+\bar{d}_ř u(t)=\begin{bmatrix}\bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \cdots & \bar{c}_n\end{bmatrix}\bar{x}(t)+du(t)$$

Parametry vektoru c jsou obecné. Lze je určit podle transformační matice (používá se k převodu jedné stavové reprezentace na druhou)

Normální forma pozorovatelnosti

$$\dot{\bar{x}}(t)=\bar{A}_p\bar{x}(t)+\bar{b}_p u(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & & & \ddots & \vdots\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}\bar{x}(t)+\begin{bmatrix}\bar{b}_1\\\bar{b}_2\\\vdots\\\bar{b}_m\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\bar{c}_p^T\bar{x}(t)+\bar{d}_p u(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\bar{x}(t)+du(t)$$

Parametry vektoru b jsou obecné. Lze je určit podle transformační matice.

Vnitřní popis LDS

Jordanova normální forma

$$\dot{\bar{x}}(t)=\bar{A}_j\bar{x}(t)+\bar{b}_j u(t)=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{bmatrix}\bar{x}(t)+\begin{bmatrix}\bar{b}_1\\ \bar{b}_2\\ \vdots\\ \bar{b}_n\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\bar{c}_j^T\bar{x}(t)+\bar{d}_j u(t)=\begin{bmatrix}\bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \cdots & \bar{c}_n\end{bmatrix}\bar{x}(t)+du(t)$$

Mějme systém ve stavové reprezentaci S: (A, b, c, d). Matici A lze rozložit na tvar A = $V^{-1}JV$, kde J je Jordanův kanonický tvar matice A a V je matice tvořená vlastními vektory matice A. V tomto případě platí následující vztahy:

$$\bar{A}_j=J=V^{-1}AV,\bar{b}_j=V^{-1}b,\bar{c}_j^T=c^TV$$

Vnitřní popis LDS

Převod mezi stavovým popisem a přenosovou funkcí

Uvažujme stavový popis dynamického systému s konstantními parametry

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$
$$y(t) = c^T x(t) + du(t)$$

Aplikací Laplaceovy transformace lze převést stavový popis na přenosovou funkci.

$$pX(p) = AX(p) + bU(p)$$
$$Y(p) = c^T X(p) + dU(p)$$

Platí při nulových počátečních podmínkách

Nyní vyjádříme z první rovnice vztah pro Laplaceův obraz stavu X(p) a dosadíme do druhé rovnice

$$X(p) = (pI - A)^{-1} bU(p)$$
$$Y(p) = c^T (pI - A)^{-1} bU(p) + dU(p)$$

I je jednotková matice

Z definice přenosové funkce pak získáme výsledný vztah

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = c^T (pI - A)^{-1} b + d$$

Vnitřní popis LDS

Příklad

Určete k zadanému systému ve stavové reprezentaci jeho přenosovou funkci

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Řešení: Zprvu vypočteme inverzní matici $(pI-A)^{-1}$. K tomu využijeme vztah pro výpočet inverze
matice pomocí matice adjungované a determinantu matice.

$$(pI - A)^{-1} = \frac{adj(pI - A)}{|pI - A|} = \frac{\begin{bmatrix} (-1)^{1+1}(p+4) & (-1)^{1+2}3 \\ (-1)^{1+2}(-1) & (-1)^{2+2}p \end{bmatrix}^T}{p^2 + 4p + 3} = \frac{\begin{bmatrix} p+4 & 1 \\ -3 & p \end{bmatrix}}{p^2 + 4p + 3}$$

Vnitřní popis LDS

Nyní můžeme tuto inverzní matici dosadit do vztahu pro přenos

$$F(p)=\frac{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p+4 & 1\\ -3 & p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}}{p^2+4p+3}=\frac{1}{p^2+4p+3}$$

Z uvedeného postupu si můžeme povšimnout, že jmenovatel přenosové funkce je roven determinantu matice pI-A. Z toho plyne, že póly systému se rovnají vlastním číslům matice dynamiky.

Zdroje a doporučená literatura

Zdroje a doporučená literatura

- F. Tůma: Kybernetika, skripta, ZČU v Plzni
- J. Melichar: učební texty k předmětu Lineární systémy 1, dostupné na http://www.kky.zcu.cz/uploads/courses/ls1/LS1_Ucebni_texty_2011.pdf
- V. Srovnal: Kybernetika, skripta, VŠB – TU Ostrava, 2008
  http://homel.vsb.cz/~ote009/files/kyb/Kybernetika.pdf