

Aplikace kybernetiky ve strojírenství

8. Zpracování signálů ve frekvenční oblasti, Fourierova transformace, DTFT, DFT a STFT

Ing. Jan Jakl, Ph.D.

Podpořeno v rámci projektu CZ.1.07/2.2.00/15.0383
Inovace studijního oboru Dopravní a manipulační technika
s ohledem na potřeby trhu práce



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Fourierova transformace

Fourierova transformace

Fourierova transformace je limitním případem Fourierova řady pro neperiodické signály.

Fourierova transformace – Fourierův obraz

$$X(\omega) = F[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-2\pi \cdot f \cdot t} dt$$

Funkce $x(t)$ a $X(\omega)$ se nazývají Fourierův pár.

Inverzní Fourierova transformace

$$x(t) = F^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Postačující podmínkou k tomu aby mohl Fourierův obraz pro danou funkci existovat je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| < \infty$$

funkce je absolutně
integrovatelná

Stejně jako u Fourierových řad můžeme definovat amplitudové a fázové spektrum

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\Phi(\omega)}$$

amplitudové spektrum je sudou funkcí ω
fázové spektrum je lichou funkcí ω

Vlastnosti Fourierovy transformace

Vlastnosti Fourierovy transformace

Uvedený seznam vlastností Fourierovy transformace není úplný, byly vybrány jen některé z nich.

- linearita

$$F[ax(t) + by(t)] = aX(\omega) + bY(\omega)$$

- posun v čase

$$F[x(t - t_0)] = X(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

posun signálu v čase má vliv pouze na fázové spektrum

- posun ve frekvenci

$$F[x(t)e^{j\omega_0 t}] = X(\omega - \omega_0)$$

- součin signálů

$$F[x(t) \cdot y(t)] = X(\omega) * Y(\omega)$$

Fourierova transformace součinu dvou signálů odpovídá konvoluci jejich Fourierových obrazů.

- konvoluce signálů

$$F[x(t) * y(t)] = X(\omega) \cdot Y(\omega)$$

Fourierova transformace konvoluce dvou signálů odpovídá součinu jejich Fourierových obrazů

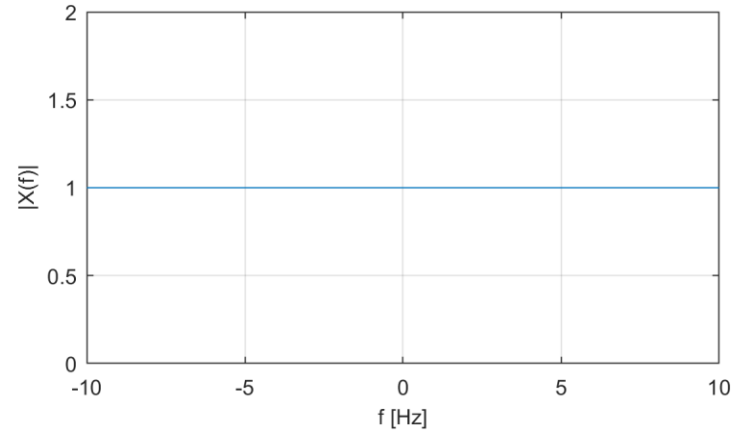
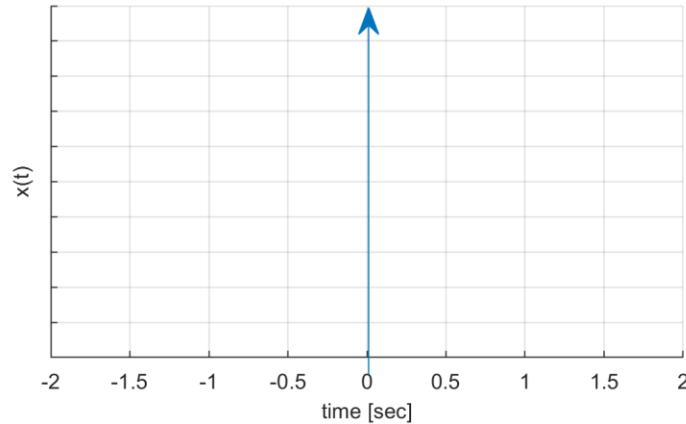
- Parsevalova věta:
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Fourierova transformace vybraných funkcí

Fourierovy transformace vybraných funkcí

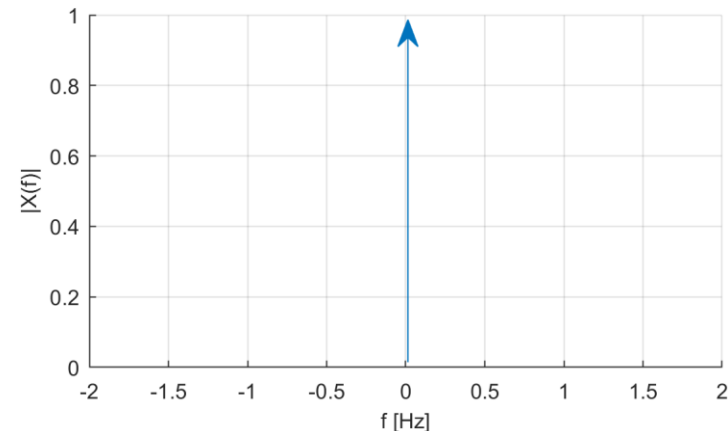
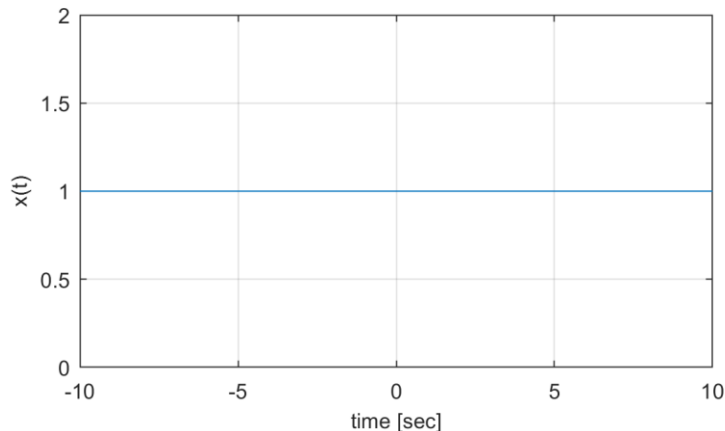
Diracův impuls

$$X(f) = F[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt = e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot 0} = 1$$



Konstantní signál

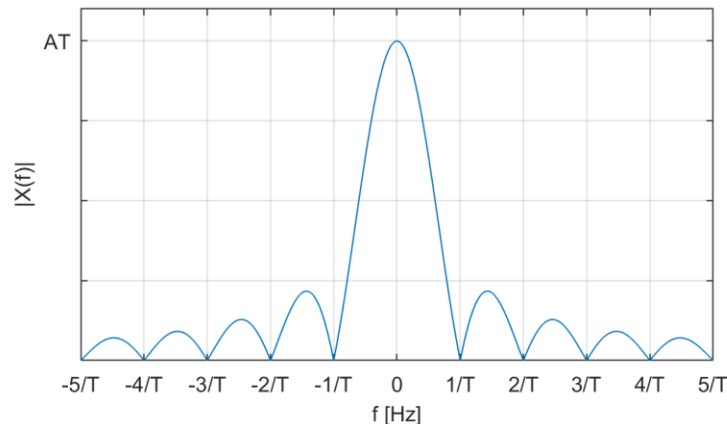
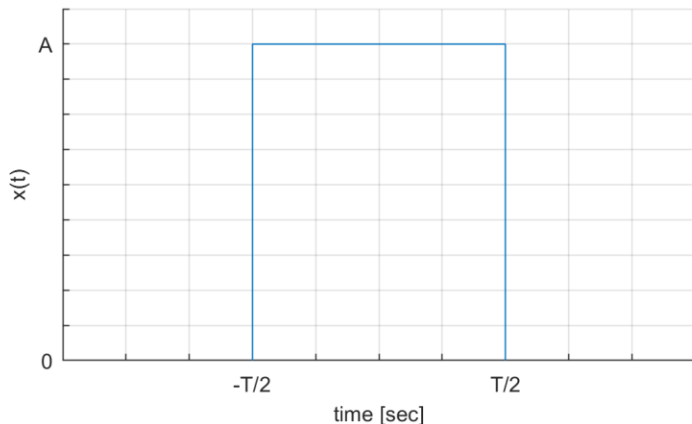
$$X(f) = F[k] = \int_{-\infty}^{\infty} k \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt = 2 \cdot \pi \cdot \delta(f)$$



Fourierova transformace vybraných funkcí

Obdélníková funkce

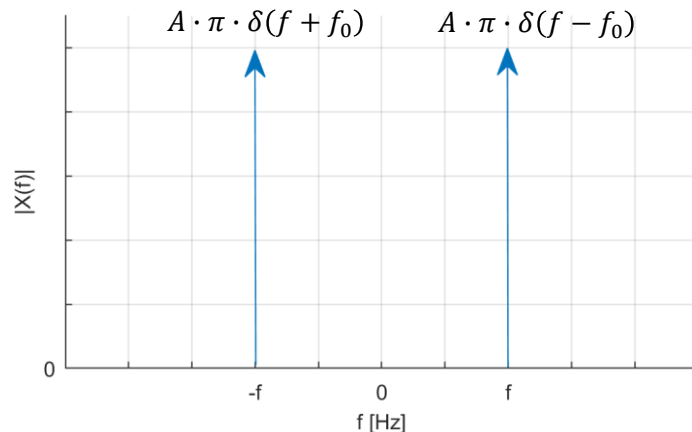
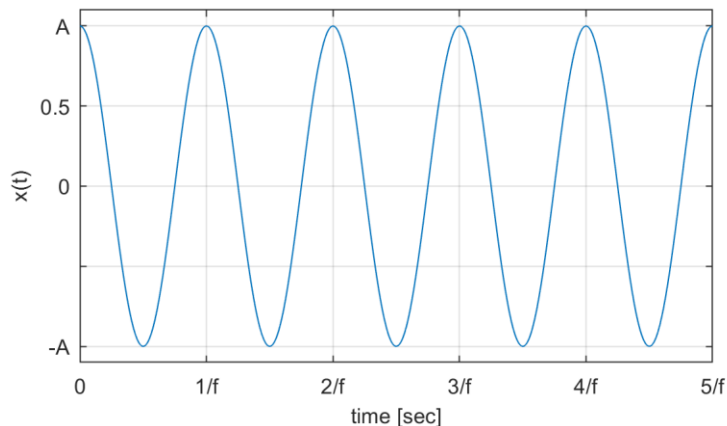
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt = A \cdot T \cdot \frac{\sin(\pi \cdot t)}{\pi \cdot t}$$



Harmonický signál

$$X(f) = F \left[A \cdot \frac{e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t}}{2} \right] = \frac{A}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t} + e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_0 \cdot t}) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt$$

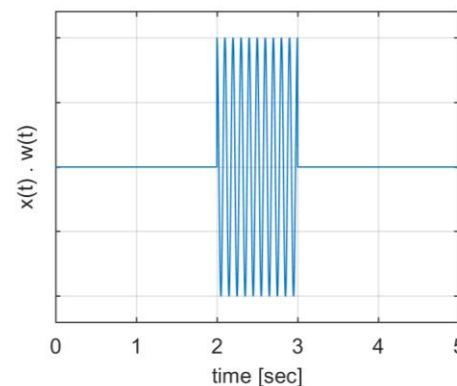
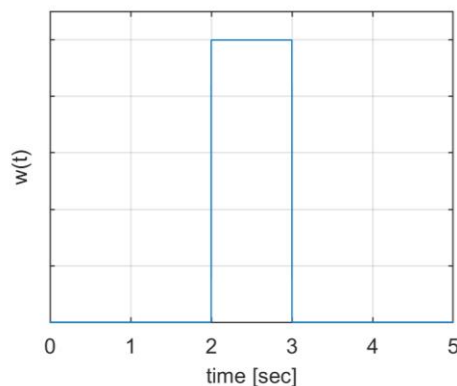
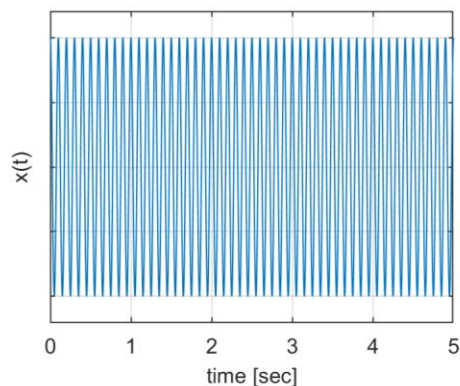
$$= A \cdot \pi \cdot [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$



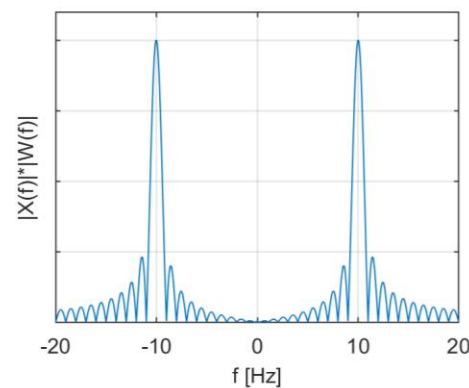
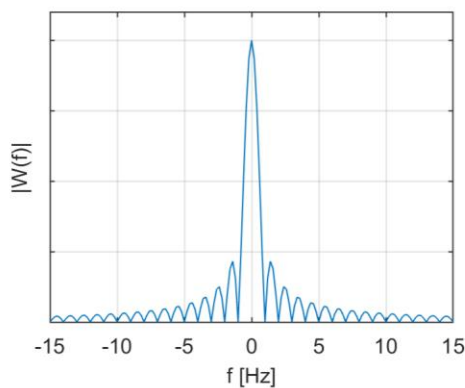
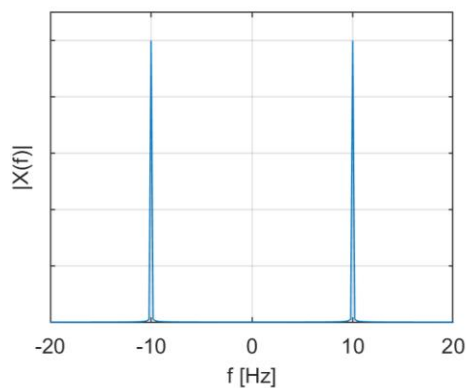
Spektrum signálu s konečnou délkou trvání

Spektrum signálu s konečnou délkou trvání (finitního signálu)

Finitní signál $x_f(t)$ si můžeme představit jako signál $x(t)$ vážený pravoúhlým okénkem $w(t)$ (obdélníkový puls). Spektrum signálu $x_f(t)$ je tedy konvolucí spekter signálů $x(t)$ a $w(t)$.



Součin v čase



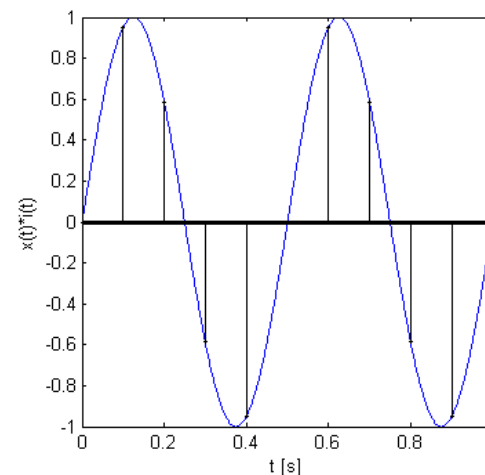
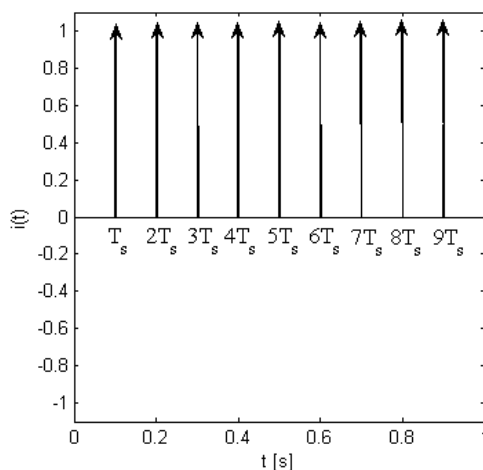
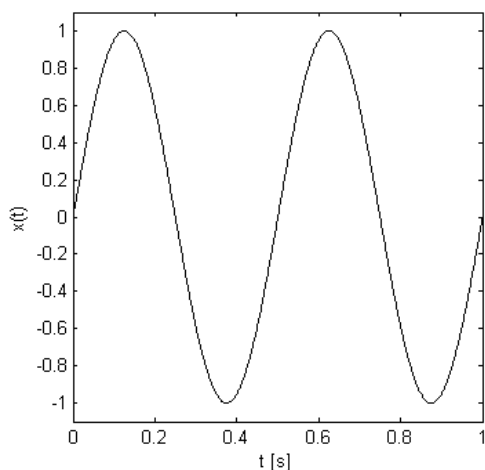
Konvoluce ve frekvenci

Spektrum diskrétního signálu

Spektrum diskrétního signálu

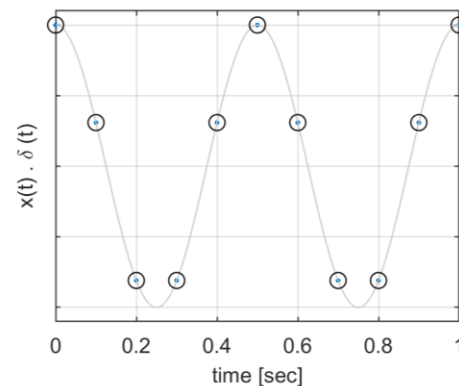
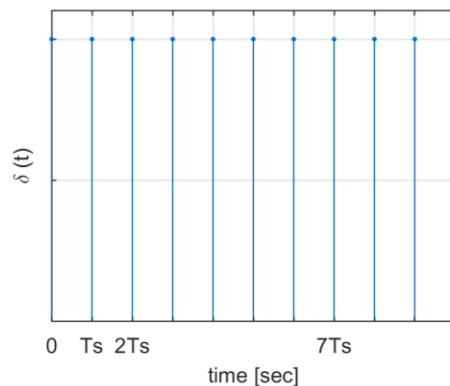
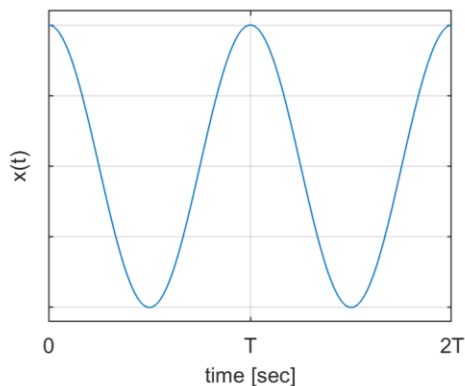
Diskretizaci (vzorkování) signálu je možné vyjádřit jako součin spojitého signálu $x(t)$ a vzorkovací funkce (v ideálním případě posloupnost Diracových pulsů posunutých v čase).

$$x_{vz}(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta(t - kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} x(kT_s) \delta(t - kT_s)$$

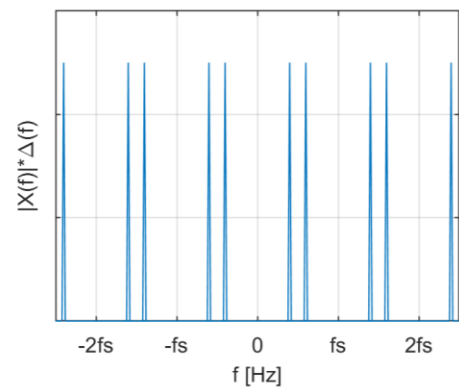
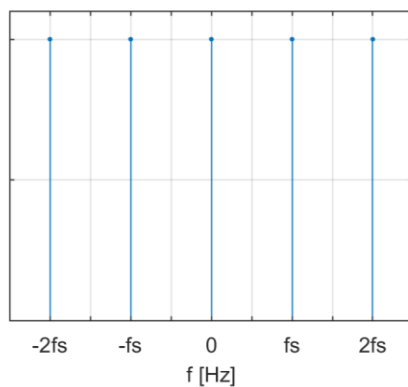
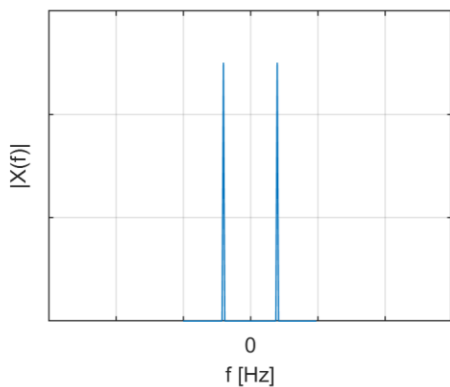


Fourierova transformace signálu $x_{vz}(t)$ je dána konvolucí spektra spojitého signálu $x(t)$ a spektra vzorkovací funkce. V literatuře je Fourierova transformace diskrétních signálů označována zkratkou DTFT – discrete time Fourier transform.

Spektrum diskrétního signálu



Součin v čase



Konvoluce ve
frekvenci

Spektrum vzorkovací funkce je periodické s periodou $f_s = 1/T_s$. Konvolucí spektra signálu $x(t)$ a spektra vzorkovací funkce tedy dochází k periodizaci původního spektra. Spektrum vzorkovaného signálu je tedy periodické.

Diskrétní Fourierova transformace

Diskrétní Fourierova transformace

Ukázali jsme, že spektrum diskrétního signálu je periodickou funkcí - je tedy postačující znalost spektra signálu pouze v intervalu periodicity. Pro výpočet spektra diskrétních signálů se používá diskrétní Fourierova transformace (DFT)

$$X[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi kn}{N}} \quad k = 0, 1, \dots, N - 1$$

Kde $x[n]$ je n -tý vzorek diskrétního signálu vzorkovaného se vzorkovací frekvencí f_s . Celková délka signálu x je N vzorků. Ve vteřinách tedy

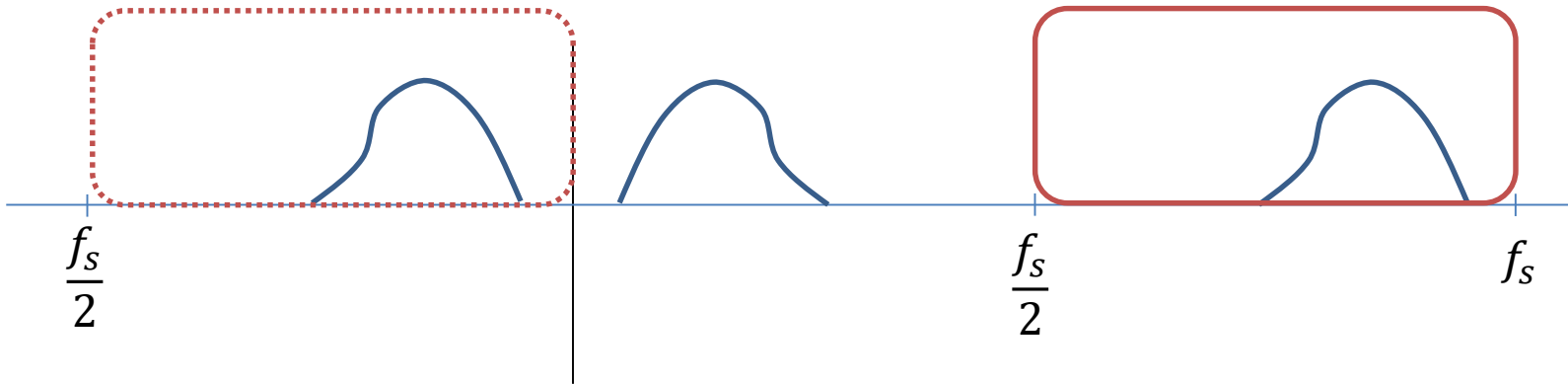
$$\frac{N}{f_s}$$

Diskrétní signál x o délce N vzorků  DFT  N vzorků spektra signálu
Spektrum diskrétního signálu je spojitou funkcí frekvence. Pomocí DFT vypočteme hodnoty tohoto spektra na frekvencích

$$f_k = \frac{k \cdot f_s}{N} \quad \Delta f = \frac{f_s}{N}$$

Diskrétní Fourierova transformace

Dle definičního vztahu získáme spektrum diskrétního signálu v intervalu $0 \text{ Hz} - \frac{N-1}{N} \cdot f_s$



Vzhledem k periodicitě spektra (perioda f_s) diskrétního signálu lze hodnoty spektra na frekvencích $\frac{f_s}{2}$ až f_s chápat jako hodnoty spektra na frekvencích $-\frac{f_s}{2}$ až 0.

Pro výpočet DFT se nejčastěji používá metoda rychlé Fourierovy transformace (Fast Fourier Transform FFT).

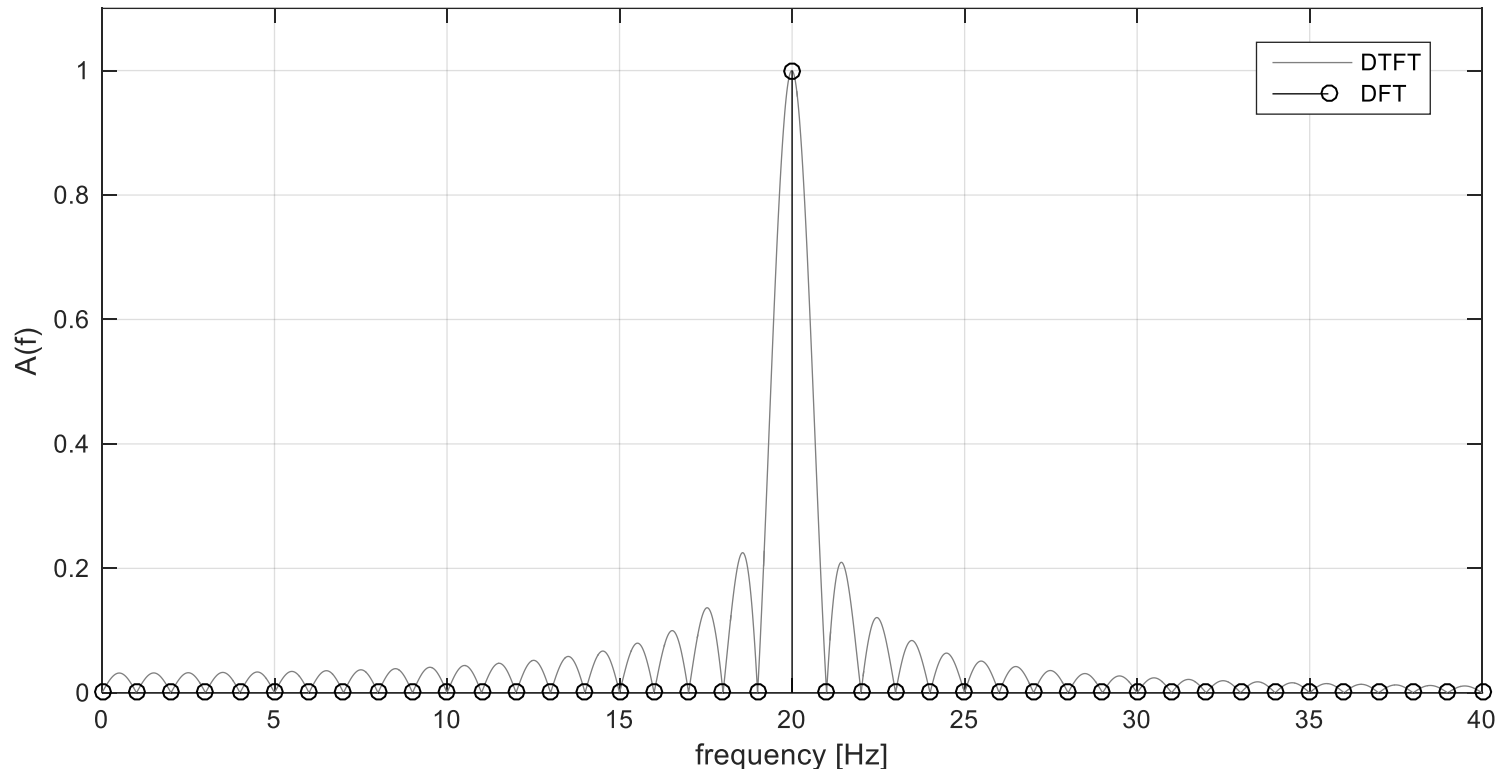
Inverzní DFT

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j \frac{2\pi kn}{N}} \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Předpokladem pro korektní interpretaci výsledků DFT je periodicitá analyzovaného signálu. V opačném případě dochází k tzv. leakage efektu (únik ve spektru) – lze řešit.

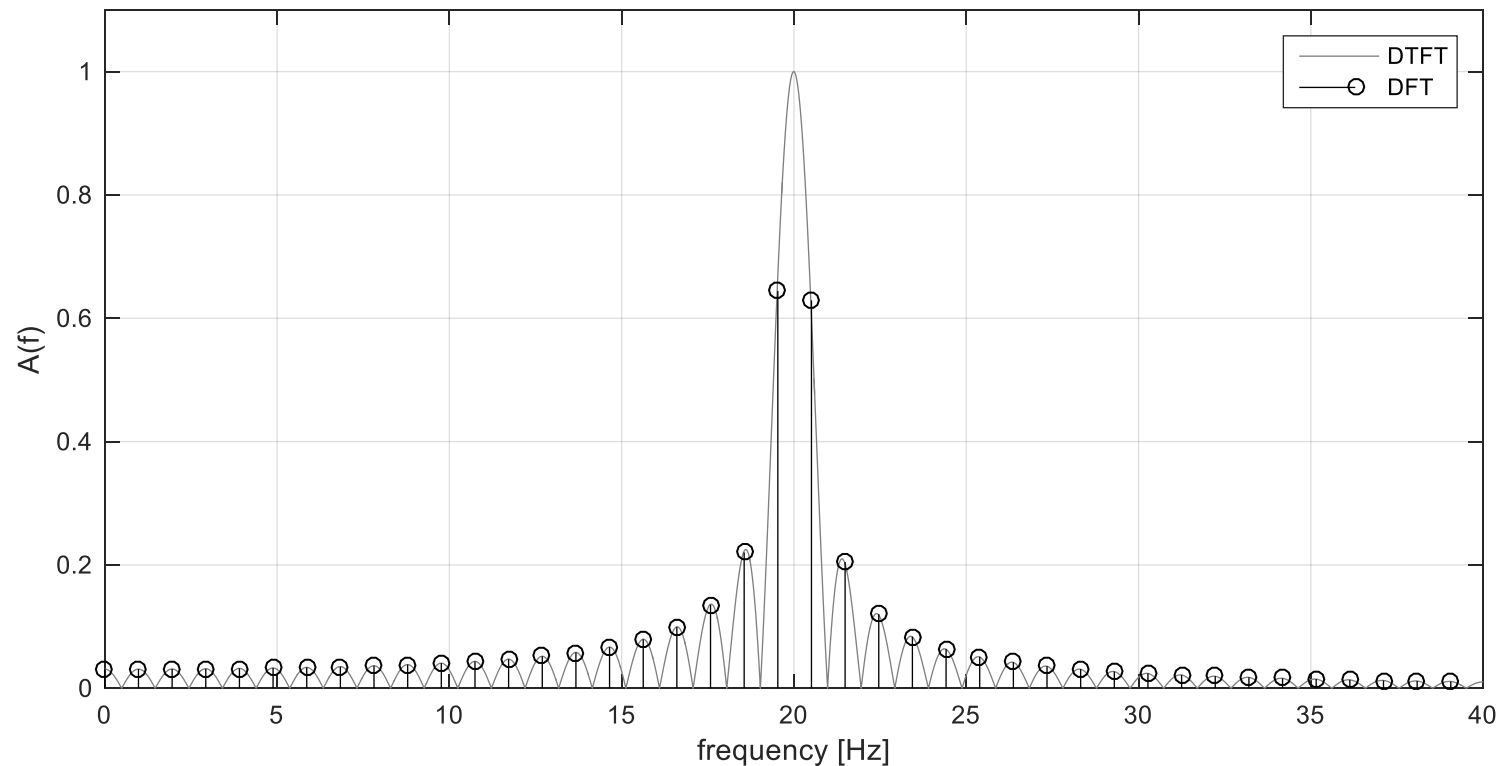
Diskrétní Fourierova transformace

Frekvence analyzovaného signálu je 20 Hz, délka signálu je 1 vteřina (20 period signálu). Spektrum DTFT je dáno konvolucí spektra harmonické složky s frekvencí 20 Hz ($\delta(f+20)$ a $\delta(f-20)$) a spektra pravoúhlé funkce (funkce sinc). Vzhledem k tomu, že je délka signálu 1 vteřina, budou lokální minima spektra na násobcích 1 Hz od 20 Hz, kde se nachází maximum spektra. Frekvenční osa DFT je rozdělena tak, že DFT je vyhodnoceno jak v lokálním maximu, tak také v lokálních minimech DTFT.



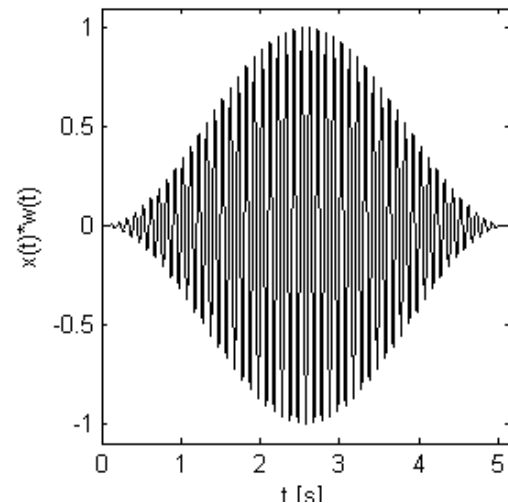
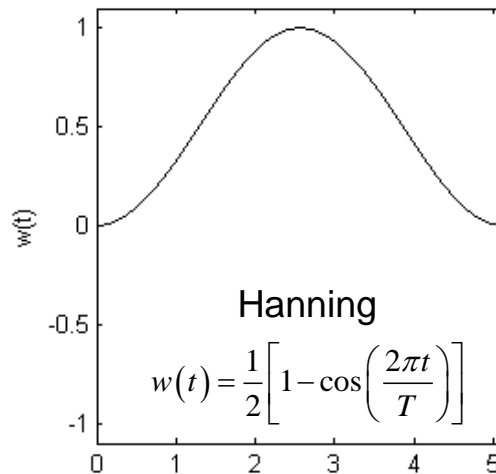
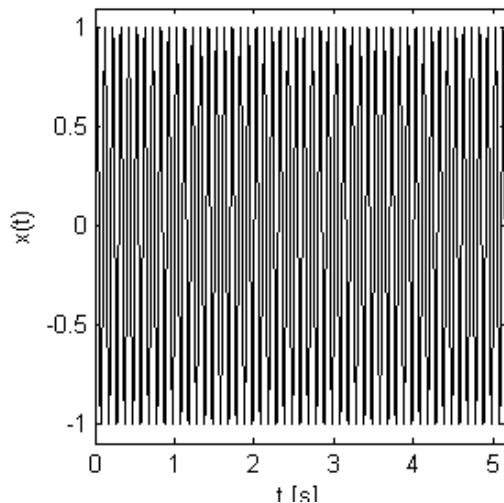
Diskrétní Fourierova transformace

Frekvence analyzovaného signálu je 20 Hz, délka signálu je v tomto případě 1,025 vteřiny (20,5 periody signálu). Vzhledem k tomu, že je délka signálu 1,025 vteřiny, budou lokální minima spektra na násobcích 0,976 Hz od 20 Hz. Frekvenční osa DFT je rozdělena tak, že DFT není pro 20 Hz vyhodnocena, ale je vyhodnocena na okolních frekvencích. Dalším důsledkem, že DFT není vyhodnocena v lokálních minimech DTFT a tudíž získáme nenulové koeficienty DFT také na frekvencích, které ve skutečnosti nejsou v analyzovaném signálu obsaženy!



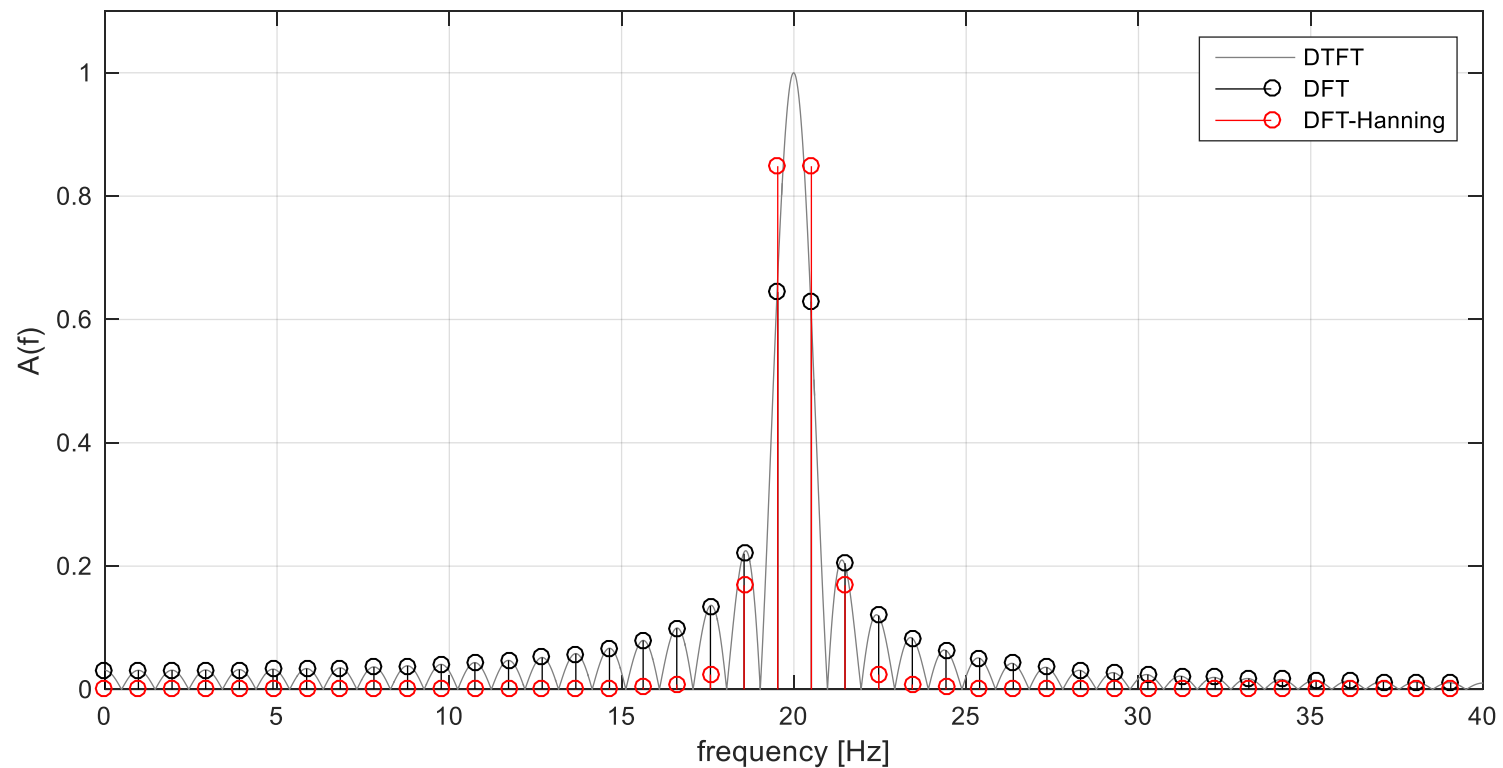
Diskrétní Fourierova transformace

Jednou z možností jak se vyhnout leakage efektu je upravit délku signálu, aby vyhovovala podmínce periodičnosti signálu. Vzhledem k tomu, že frekvence harmonických komponent signálu dopředu neznáme (proto provádíme frekvenční analýzu) nelze zpravidla první možnost efektivně využít. Jinou možností je vynásobit signál s vhodnou okénkovou (váhovou) funkcí, čímž vznikne periodický signál, a až poté počítat DTF.



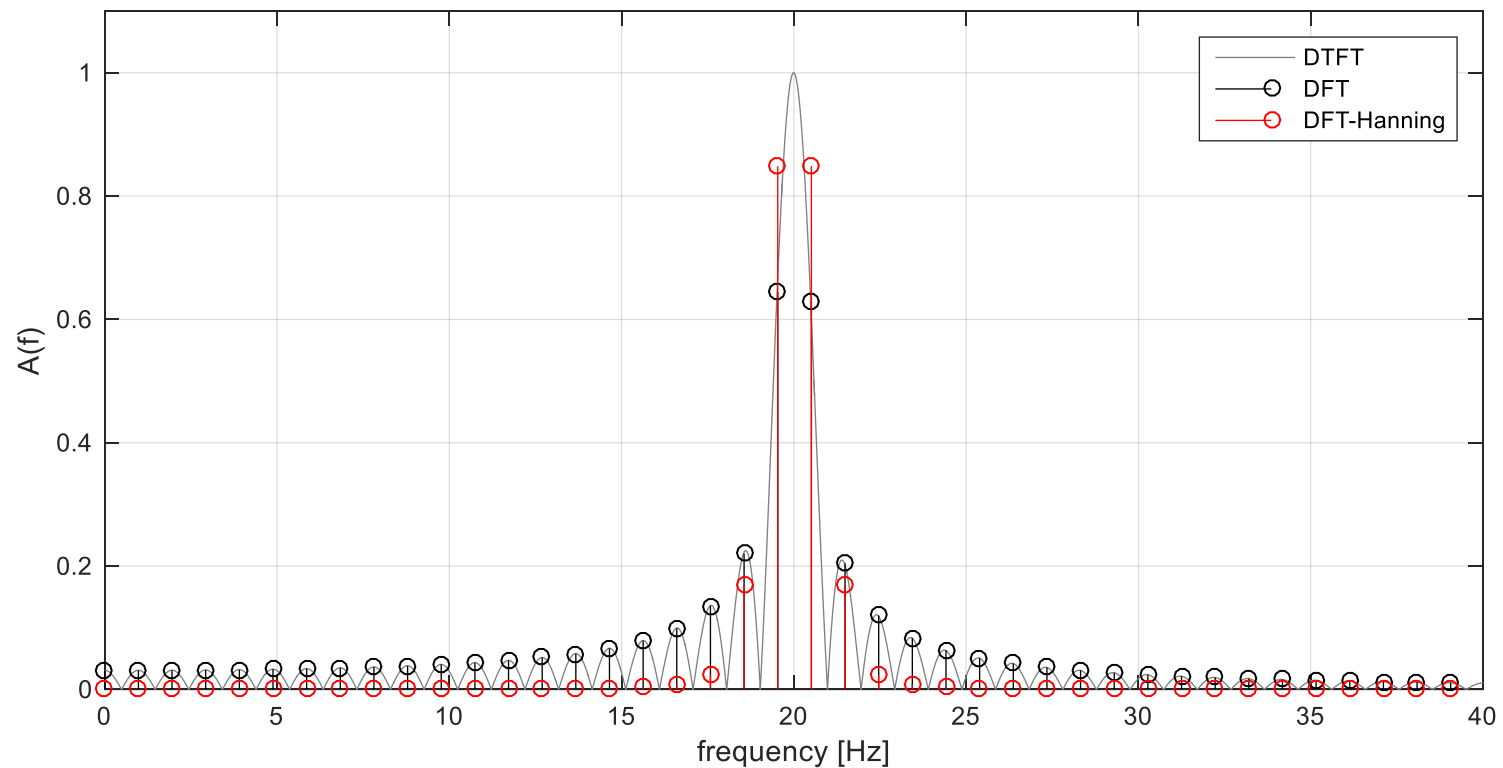
Diskrétní Fourierova transformace

Porovnání DTFT neperiodického signálu, DFT neperiodického signálu a DFT neperiodického signálu váženého Hanningovou okénkovou funkcí,



Diskrétní Fourierova transformace

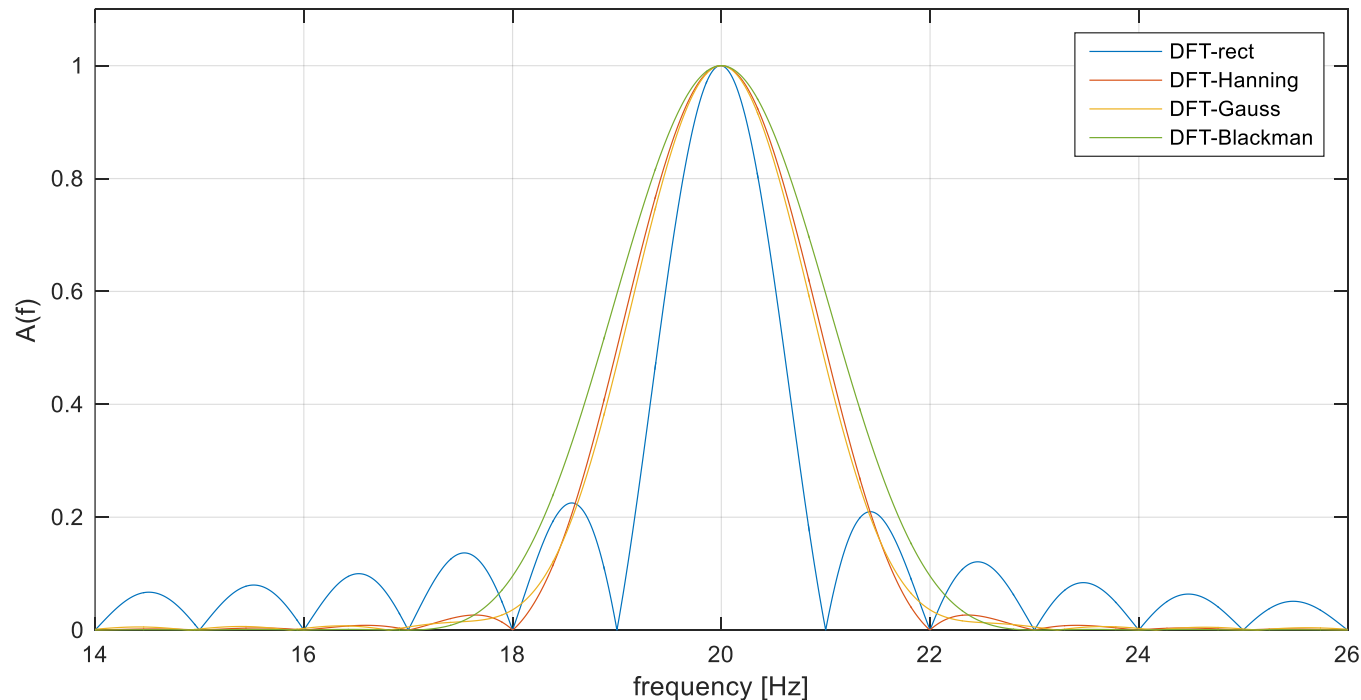
Porovnání DTFT neperiodického signálu, DFT neperiodického signálu a DFT neperiodického signálu váženého Hanningovou okénkovou funkcí,



Diskrétní Fourierova transformace

Existuje celá řada okénkových (váhových) funkcí, které mají odlišné parametry (šířka hlavního vrcholu/potlačení postranních vrcholů). Volba vhodné okénkové funkce vždy záleží na povaze analyzovaných signálů a také na účelu jejich zpracování. Vliv váhové funkce na amplitudy spektra signálu je vždy nutné kompenzovat:

$$A_{komp}(f) = \frac{A(f)}{\frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^N w[k]}$$



Krátkodobá Fourierova transformace

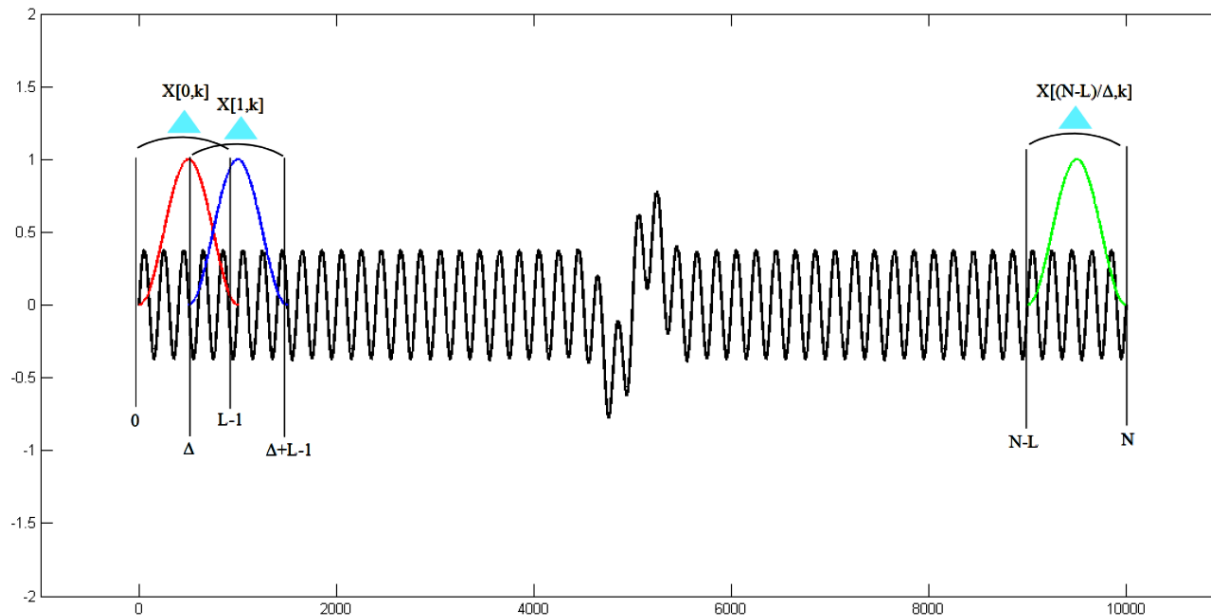
Krátkodobá Fourierova transformace (Short Time Fourier Transform STFT)

Jestliže se parametry analyzovaného signálu v čase mění, nelze tyto změny pomocí DFT postihnout.

Pro sledování změn parametrů signálu se používá STFT

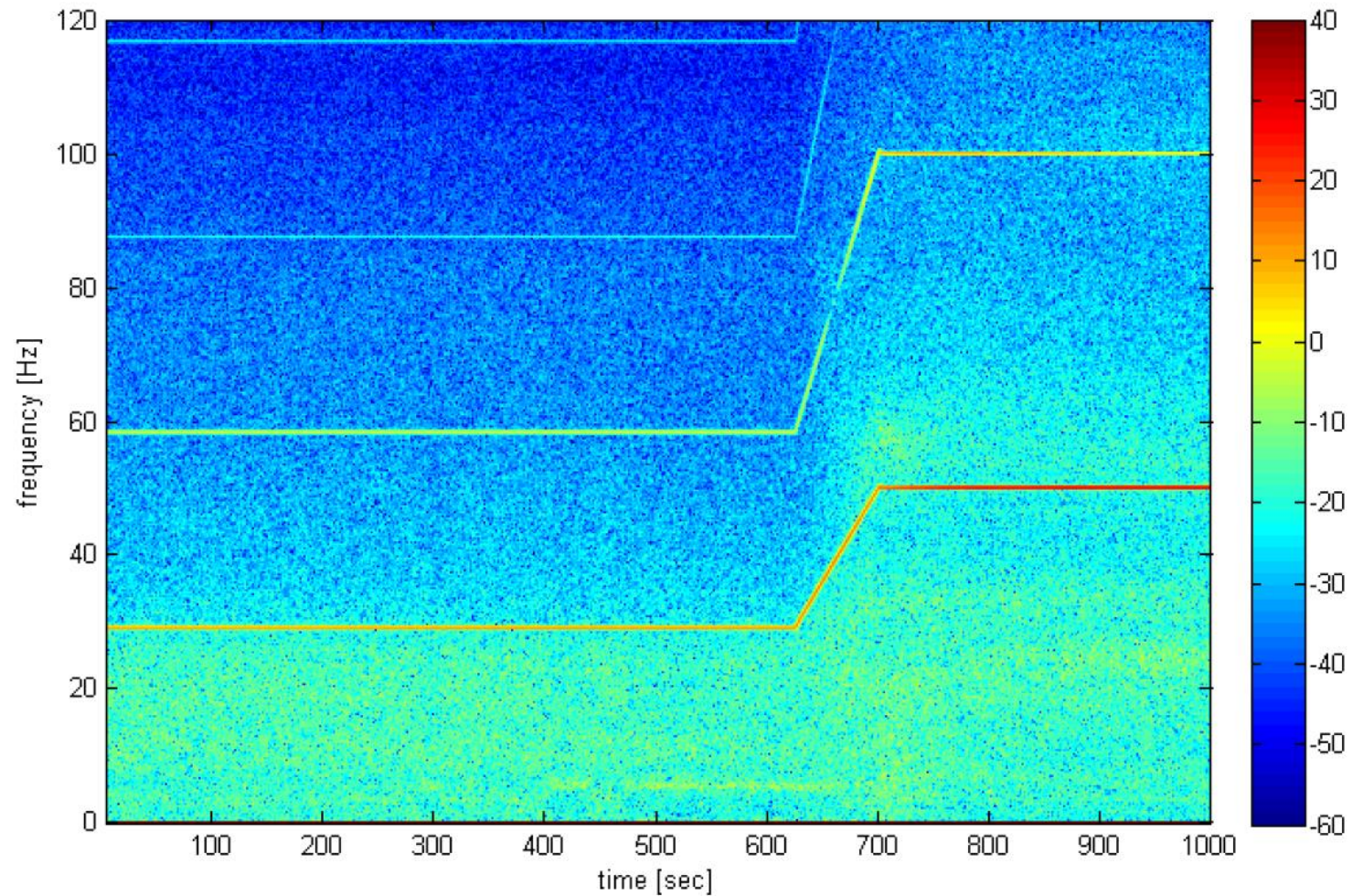
Základní princip – rozdělení signálu na kratší úseky, u kterých lze předpokládat (alespoň mlčky) stacionaritu (neměnnost parametrů) a tyto úseky zpracovat pomocí DFT samostatně.

$$X(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot w(\tau - t) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$



Zobrazení výsledku ve formě spektrogramu – barevná mapa nebo 3D graf

Krátkodobá Fourierova transformace



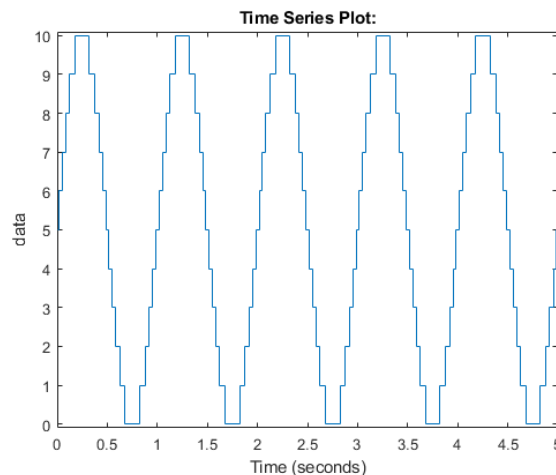
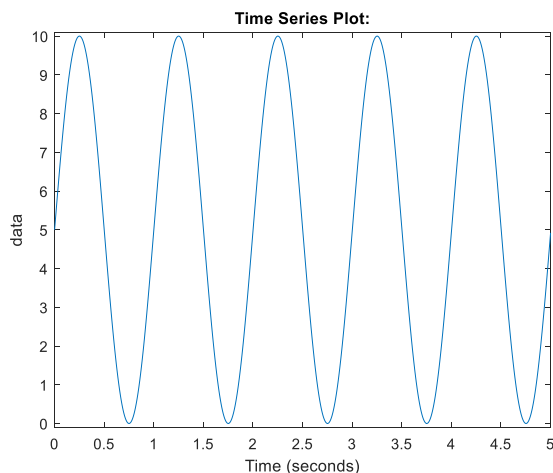
Vzorkování signálů

K tomu aby mohly být analogové signály zpracovány číslově, musejí být diskretizovány. K diskretizaci analogových signálů se používají A/D převodníky. Diskretizace probíhá na dvou úrovních

- **v úrovni** – kvantování: Měřený analogový signál může v hodnotách nabývat libovolných hodnot z oboru reálných čísel. Hodnota diskretizovaného signálu však je uchována v konečně velké paměti číslicového zařízení – pomocí definovaného počtu bitů. Dochází tak k diskretizaci úrovně signálu – signál může nabývat jen jedné z konečného počtu hodnot, které jsou od sebe vzdáleny o kvantizační krok

$$q = \frac{x_{MAX} - x_{MIN}}{2^N - 1}$$

Hodnoty x_{MAX} a x_{MIN} určují rozsah měřicí karty a N stanovuje počet bitů A/D převodníku



Vzorkování signálů

- **v čase** – vzorkování: Hodnota měřeného signálu je definována v konečném počtu časových okamžiků. Zpravidla se používá ekvidistantní vzorkování v čase, tj. signál je vzorkován v časech T_s (perioda vzorkování) a jeho celočíselných násobcích. Převrácená hodnota T_s je frekvence vzorkování f_s .

$$x[n] = x(nT_s)$$

- **Vzorkovací teorém**

$$f_s > 2 \cdot f_{max}$$

Vzorkovací teorém říká, že vzorkovací frekvence f_s by měla být alespoň 2x větší, než je maximální frekvence některé z komponent měřeného signálu. V praxi se používá

$$f_s > 2,56 \cdot f_{max}$$

Pokud je vzorkovací frekvence zvolena podle vzorkovacího teorému je signál korektně vzorkován v čase a lze signál zpět převést do analogové podoby pomocí D/A převodníku.

V opačném případě dochází k aliasing efektu.

Vzorkování signálů

- **v čase** – vzorkování: Hodnota měřeného signálu je definována v konečném počtu časových okamžiků. Zpravidla se používá ekvidistantní vzorkování v čase, tj. signál je vzorkován v časech T_s (perioda vzorkování) a jeho celočíselných násobcích. Převrácená hodnota T_s je frekvence vzorkování f_s .

$$x[n] = x(nT_s)$$

- **Vzorkovací teorém**

$$f_s > 2 \cdot f_{max}$$

Vzorkovací teorém říká, že vzorkovací frekvence f_s by měla být alespoň 2x větší, než je maximální frekvence některé z komponent měřeného signálu. V praxi se používá

$$f_s > 2,56 \cdot f_{max}$$

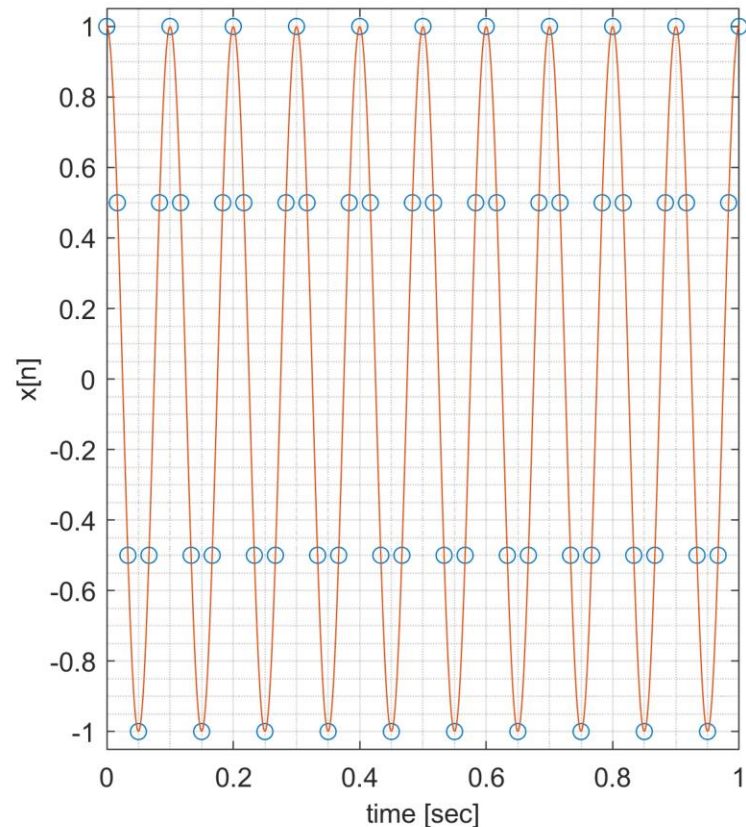
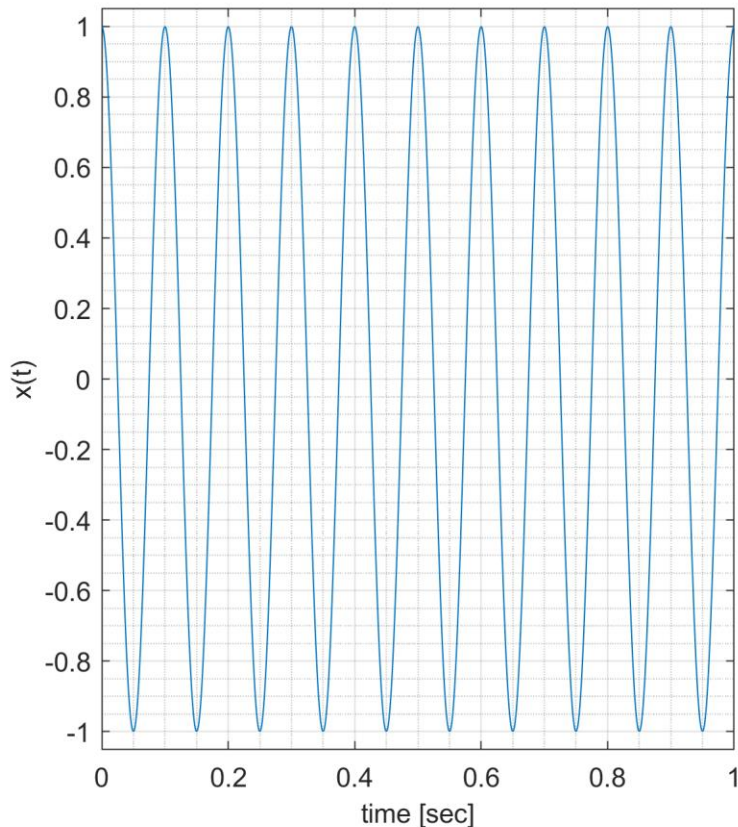
Pokud je vzorkovací frekvence zvolena podle vzorkovacího teorému je signál korektně vzorkován v čase a lze signál zpět převést do analogové podoby pomocí D/A převodníku.

V opačném případě dochází k aliasing efektu.

Aliasing efekt

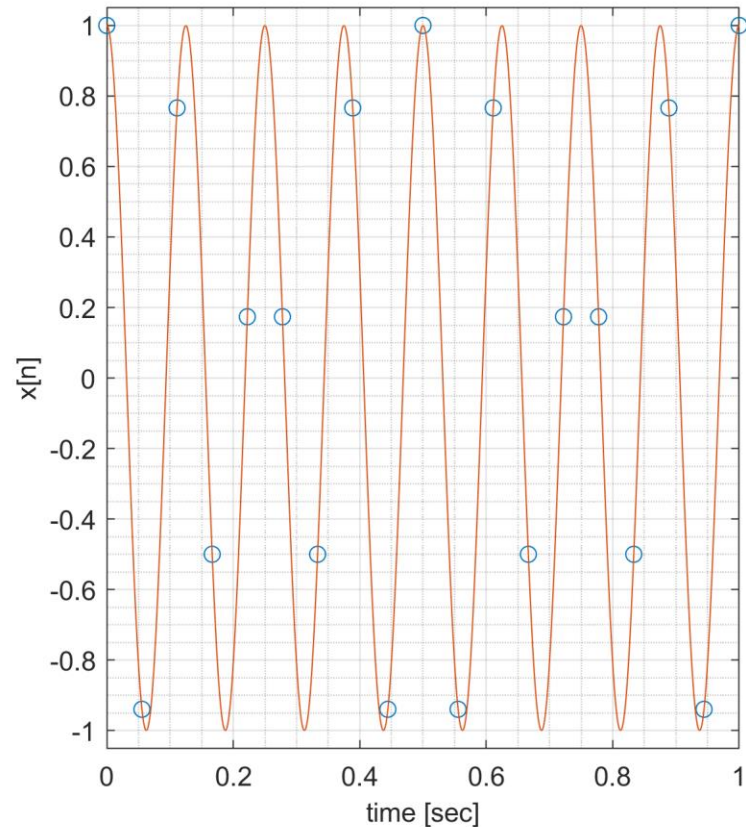
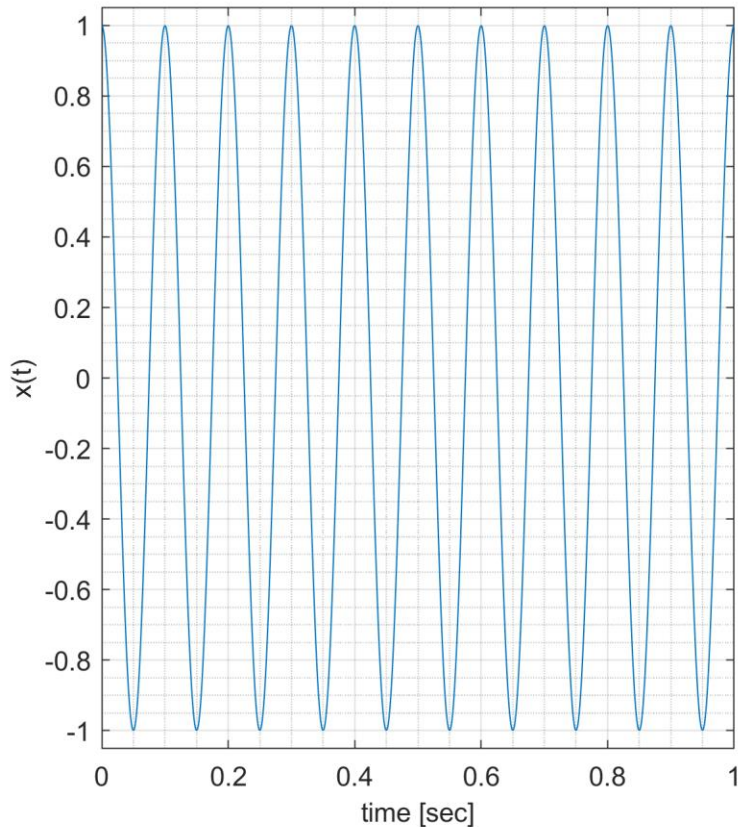
Co je to aliasing efekt?

Uvažujme signál s frekvencí 10 Hz a vzorkujme ho se vzorkovací frekvencí 60 Hz. Vzorkovací teorém je v tomto případě splněn a frekvence diskrétního signálu je správných 10 Hz.



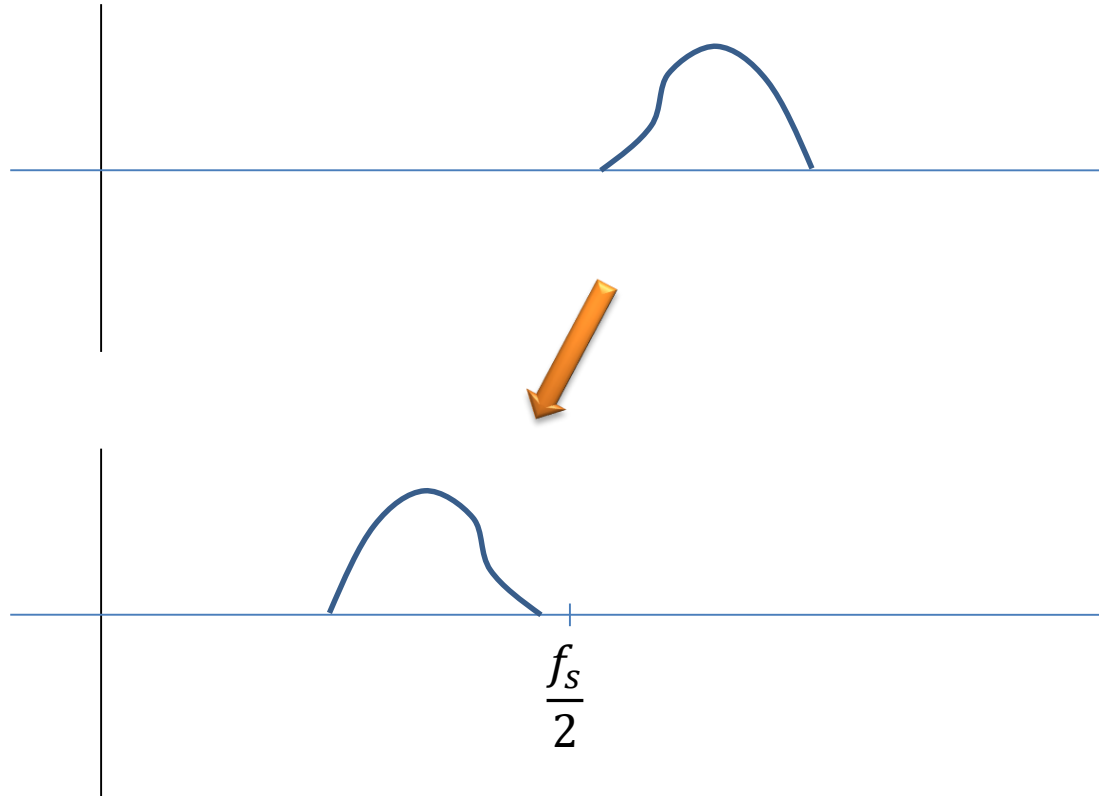
Aliasing efekt

Nyní uvažujme, že stejný signál vzorkujeme s frekvencí 18 Hz. Vzorkovací teorém je v tomto případě splněn není a zdánlivá frekvence diskrétního signálu je chybných 8 Hz. Co se stalo?



Aliasing efekt

Při nedodržení vzorkovacího teorému dochází k jevu, kdy se ve skutečnosti vyšší frekvence zdánlivě tváří jako frekvence nižší.

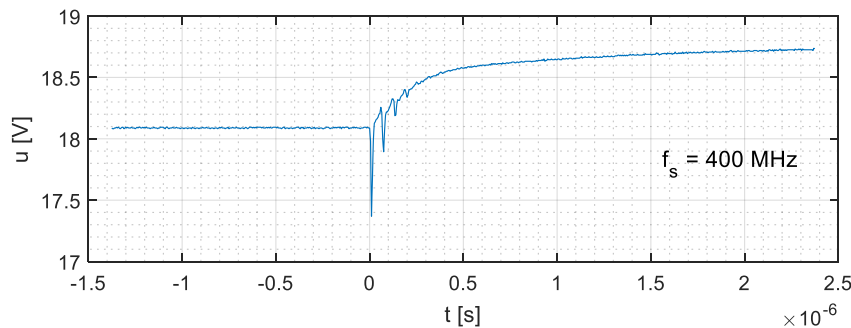
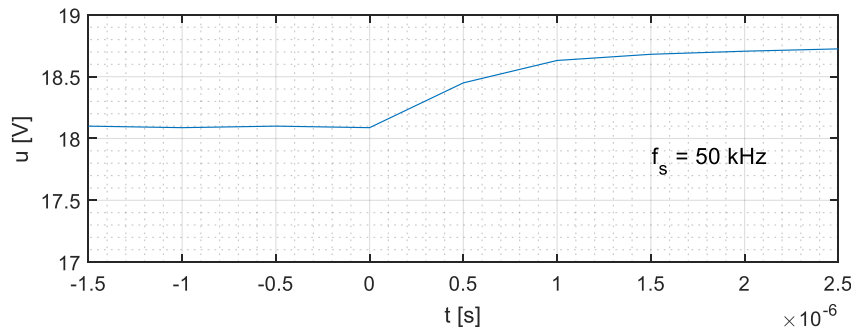


Frekvence signálu vyšší než $f_s/2$ se „překlopí“ okolo bodu $f_s/2$ do nižších frekvencí.

Aliasing efekt

Jak můžeme aliasing efektu zabránit?

- Použít vzorkovací frekvenci dostatečnou k tomu, aby byl splněn vzorkovací teorém. Ne vždy je to však možné. Průmyslové měřicí karty mají vždy konečně velkou vzorkovací frekvenci.
- Použít anti-aliasing filtr. Jedná se o filtr typu dolní propust, který všechny frekvenční složky signálu větší než $f_s/2$ potlačí. Měřicí karty mají tento filtr již zpravidla implementovaný jako svoji součást.



Extrémní případ – použitím pomalejšího vzorkování s anti-aliasing filtrem jsme ztratili informaci o špičkách v signálu, které se projevily pro vyšším vzorkování. Frekvence špiček byla 15 MHz.