INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt CZ.1.07/2.2.00/15.0383
Inovace studijního oboru Dopravní a manipulační technika
s ohledem na potřeby trhu práce

# Aplikace kybernetiky ve strojírenství
# Sbírka příkladů

Doprovodný učební text

**Ing. Jan Jakl**

**2013**

# Obsah

## Laplaceova transformace

1. Vypočtěte Laplaceovu transformaci následujících funkcí:
   a) $y(t) = e^{-3t}$
   b) $y(t) = \sin(\omega t)$
   c) $y(t) = e^{-2t}\sin(2\omega t)$
   d) $y(t) = e^{5t}\sin(\omega t) + \cos(3\omega t)$

Řešení:

a) Pro určení Laplaceova obrazu funkce y(t) máme v podstatě dvě možnosti. První z nich je využití definičního vztahu pro Laplaceovu transformaci:

$$Y(p) = L\{y(t)\} = \int_0^\infty y(t)e^{-pt}dt = \int_0^\infty e^{-3t}e^{-pt}dt = \int_0^\infty e^{-(p+3)t}dt = -\frac{1}{p+3}\left[e^{-(p+3)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{p+3}$$

Druhou možností je využití existujících slovníků[1], ve kterých jsou Laplaceovy obrazy základních funkcí. Podle slovníku Laplaceovy transformace platí:

$$Y(p) = L\{e^{at}\} = \frac{1}{p-a}$$

Dosazením $a = -3$ získáme výsledek $Y(p) = \frac{1}{p+3}$.

b) Výpočet Laplaceova obrazu s využitím definičního vztahu:
S využitím trigonometrických vztahů můžeme funkci y(t) zapsat ve tvaru

$y(t) = \sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$. Tedy

$$Y(p) = L\{y(t)\} = \frac{1}{2j}\int_0^\infty \left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)e^{-pt}dt = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega}\right) = \frac{1}{2j}\frac{2j\omega}{p^2+\omega^2} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

Při výpočtu jsme využili výsledku z bodu a) a linearitu Laplaceovy transformace.
Podle Laplaceova slovníku platí

$Y(p) = L\{\sin(bt)\} = \frac{b}{p^2+b^2}$. Po dosazení $b = \omega$ získáme výsledek.

c) Vypočteme pomocí slovníku Laplaceovy transformace

$$Y(p) = L\{e^{at}\sin(bt)\} = \frac{b}{(p-a)^2+b^2}.$$

Po dosazení $a = -2$ a $b = 2\omega$ získáme konečný výsledek

[1] Slovník naleznete v prezentaci k druhé přednášce.

$$Y(p) = \frac{2\omega}{(p+2)^2 + 4\omega^2}.$$

d) Při výpočtu Laplaceova obrazu Y(p) využijeme linearitu Laplaceovy transformace, tedy

$$Y(p) = L\left\{e^{5t}\sin(\omega t) + \cos(3\omega t)\right\} = L\left\{e^{5t}\sin(\omega t)\right\} + L\left\{\cos(3\omega t)\right\}.$$

S využitím slovníku Laplaceovy transformace získáme vztah

$$Y(p) = L\left\{e^{at}\sin(b_1 t)\right\} + L\left\{\cos(b_2 t)\right\} = \frac{b_1}{(p-a)^2 + b_1^2} + \frac{p}{p^2 + b_2^2}.$$

Po dosazení $a = 5,\ b_1 = \omega$ a $b_2 = 3\omega$ získáme konečný výsledek

$$Y(p) = \frac{\omega}{(p-5)^2 + \omega^2} + \frac{p}{p^2 + 9\omega^2}.$$

2. S využitím slovníku Laplaceovy transformace vypočtěte Laplaceovy obrazy funkcí:

a) $y(t) = e^{-t} + \cos(4\pi t)$

b) $y(t) = \sin(3\pi t) + e^{2t}\cos(\pi t)$

c) $y(t) = e^{-3t}\sin(2\pi t) + t\sin(4\pi t)$

d) $y(t) = t^3$

e) $y(t) = e^2\sin(6\pi t) + e^{-3t}t^5$

## Obrazový přenos

1. Systém je popsán lineární diferenciální rovnicí[2] s konstantními koeficienty s nulovými počátečními podmínkami (n.p.p.)

$$y^{(5)}(t)+3y^{(4)}(t)+5y^{(3)}(t)-2\ddot{y}(t)+4\dot{y}(t)+y(t)=2u^{(3)}(t)-\ddot{u}(t)+3\dot{u}(t)+u(t)$$

Určete obrazový přenos tohoto systému.

Řešení:
Aplikujeme Laplaceovu transformaci na levou i pravou stranu lineární diferenciální rovnice.
Při výpočtu využijeme linearity Laplaceovy transformace a větu o obrazu derivace funkce.
Linearita:

$$L\left\{y^{(5)}(t)+3y^{(4)}(t)+5y^{(3)}(t)-2\ddot{y}(t)+4\dot{y}(t)+y(t)\right\}=L\left\{2u^{(3)}(t)-\ddot{u}(t)+3\dot{u}(t)+u(t)\right\}$$

$$L\left\{y^{(5)}(t)\right\}+L\left\{3y^{(4)}(t)\right\}+L\left\{5y^{(3)}(t)\right\}+L\left\{-2\ddot{y}(t)\right\}+L\left\{4\dot{y}(t)\right\}+L\left\{y(t)\right\}=L\left\{2u^{(3)}(t)\right\}+L\left\{-\ddot{u}(t)\right\}+L\left\{3\dot{u}(t)\right\}+L\left\{u(t)\right\}$$

$$L\left\{y^{(5)}(t)\right\}+3L\left\{y^{(4)}(t)\right\}+5L\left\{y^{(3)}(t)\right\}-2L\left\{\ddot{y}(t)\right\}+4L\left\{\dot{y}(t)\right\}+L\left\{y(t)\right\}=2L\left\{u^{(3)}(t)\right\}-L\left\{\ddot{u}(t)\right\}+3L\left\{\dot{u}(t)\right\}+L\left\{u(t)\right\}$$

Obraz časové derivace:

$$p^5Y(p)+3p^4Y(p)+5p^3Y(p)-2p^2Y(p)+4pY(p)+Y(p)=2p^3U(p)-p^2U(p)+3pU(p)+U(p)$$

$$\left(p^5+3p^4+5p^3-2p^2+4p+1\right)Y(p)=U(p)\left(2p^3-p^2+3p+1\right)$$

Nyní vypočteme přenos systému

$$F(p)=\left.\frac{Y(p)}{U(p)}\right|_{n.p.p.}=\frac{2p^3-p^2+3p+1}{p^5+3p^4+5p^3-2p^2+4p+1}$$

2. Vypočtěte obrazový přenos systému popsaného LDR s n.p.p.

$$3y^{(4)}(t)-y^{(3)}(t)+2\ddot{y}(t)+4\dot{y}(t)+3y(t)=\ddot{u}(t)-\dot{u}(t)+3u(t)$$

Řešení:
Aplikujeme Laplaceovu transformaci na obě strany diferenciální rovnice.

$$L\left\{3y^{(4)}(t)-y^{(3)}(t)+2\ddot{y}(t)+4\dot{y}(t)+3y(t)\right\}=L\left\{\ddot{u}(t)-\dot{u}(t)+3u(t)\right\}$$

$$3L\left\{y^{(4)}(t)\right\}-L\left\{y^{(3)}(t)\right\}+2L\left\{\ddot{y}(t)\right\}+4L\left\{\dot{y}(t)\right\}+3L\left\{y(t)\right\}=L\left\{\ddot{u}(t)\right\}-L\left\{\dot{u}(t)\right\}+3L\left\{u(t)\right\}$$

$$3p^4Y(p)-p^3Y(p)+2p^2Y(p)+4pY(p)+3Y(p)=p^2U(p)-pU(p)+3U(p)$$

$$3p^4Y(p)-p^3Y(p)+2p^2Y(p)+4pY(p)+3Y(p)=p^2U(p)-pU(p)+3U(p)$$

$$\left(3p^4-p^3+2p^2+4p+3\right)Y(p)=\left(p^2-p+3\right)U(p)$$

[2] Pokud nebude uvedeno jinak, budeme v dalším uvažovat pouze lineární diferenciální rovnice (LDR) s konstantními koeficienty.

Přenos systému

$$F(p) = \left.\frac{Y(p)}{U(p)}\right|_{n.p.p.} = \frac{p^2 - p + 3}{3p^4 - p^3 + 2p^2 + 4p + 3}$$

3. Vypočtěte obrazový přenos systému popsaného LDR s n.p.p.

$$2y^{(4)}(t) + 3y^3(t) + 2\ddot{y}(t) + y(t) = u^{(3)}(t) - \dot{u}(t) + u(t)$$

Řešení:
Aplikací Laplaceovy transformace na levou i pravou stranu diferenciální rovnice získáme

$$L\left\{2y^{(4)}(t) + 3y^{(3)}(t) + 2\ddot{y}(t) + y(t)\right\} = L\left\{u^{(3)}(t) - \dot{u}(t) + u(t)\right\}$$

$$2L\left\{y^{(4)}(t)\right\} + 3L\left\{y^{(3)}(t)\right\} + 2L\left\{\ddot{y}(t)\right\} + L\left\{y(t)\right\} = L\left\{u^{(3)}(t)\right\} - L\left\{\dot{u}(t)\right\} + L\left\{u(t)\right\}$$

$$2p^4Y(p) + 3p^3Y(p) + 2p^2Y(p) + Y(p) = p^3U(p) - pU(p) + U(p)$$

$$\left(2p^4 + 3p^3 + 2p^2 + 1\right)Y(p) = U(p)\left(p^3 - p + 1\right)$$

Obrazový přenos

$$F(p) = \left.\frac{Y(p)}{U(p)}\right|_{n.p.p.} = \frac{p^3 - p + 1}{2p^4 + 3p^3 + 2p^2 + 1}$$

4. Vypočtěte obrazový přenos následujících systémů popsaných LDR s n.p.p.
   a) $\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$
   b) $y^{(3)}(t) - \frac{\sqrt{3}}{2}\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) - y(t) = \ddot{u}(t) + u(t)$
   c) $y^{(4)}(t) + 2y^{(3)}(t) + 3\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) - y(t) = u(t)$
   d) $4y^{(5)}(t) - 2y^{(4)}(t) + 3y^{(3)}(t) - 2\dot{y}(t) + y(t) = -3\ddot{u}(t) + \dot{u}(t) + u(t)$
   e) $y^{(6)}(t) + \sqrt{2}y^{(4)}(t) - 2\ddot{y}(t) + y(t) = u^{(5)}(t) - \pi u^{(3)}(t) + 3u(t)$

## Póly a nuly systému, časové konstanty a statické zesílení

1. Systém je popsán obrazovým přenosem

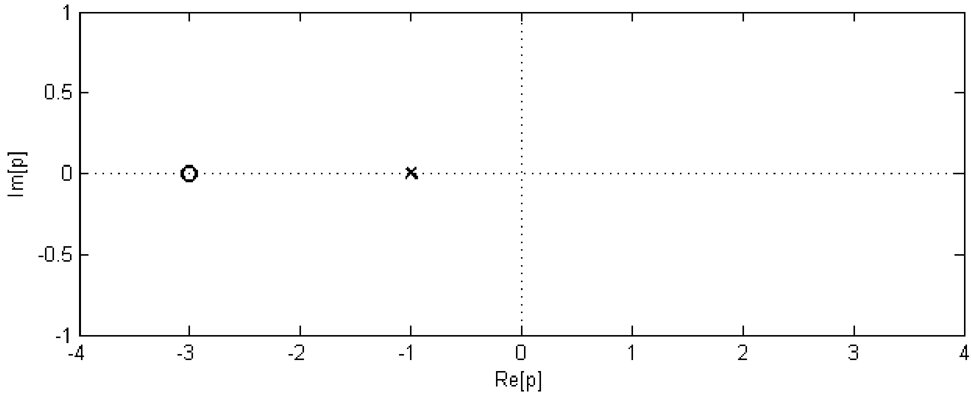
$$F(p) = \frac{p+3}{p^2+2p+1}.$$

Vypočtěte póly a nuly systému, dále pak jeho časové konstanty, statické zesílení a ustálenou hodnotu výstupní veličiny, jestliže na vstupu systému bude působit signál 2[t] (U(p)=2/p). Zakreslete polohu pólů a nul systému v komplexní rovině.

Řešení:
Nuly, resp. póly systému určíme výpočtem kořenů polynomů v čitateli, resp. ve jmenovateli přenosové funkce.

$$F(p) = \frac{p+3}{(p+1)(p+1)} = \frac{p-n_1}{(p-p_1)(p-p_2)}$$

Systém má tedy jednu nulu $n_1 = -3$ a dvojnásobný pól $p_{1,2} = -1$.




Nula i póly systému jsou reálné a tudíž je možné vypočítat časové konstanty systému. Časové konstanty a statické zesílení určíme zapsáním přenosu do tvaru

$$F(p) = 3\frac{1/3p+1}{(p+1)(p+1)} = K_s \frac{\tau_1 p+1}{(T_1 p+1)(T_2 p+1)}.$$

Časové konstanty systému tedy jsou $\tau_1 = 1/3s$ a $T_1 = T_2 = 1s.$ Statické zesílení systému $Ks = 3.$ Ustálenou hodnotu výstupní veličiny vypočteme na základě Věty o koncové hodnotě

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{p\to 0} pY(p) = \lim_{p\to 0} pU(p)F(p) = \lim_{p\to 0} p\frac{2}{p}\frac{p+3}{p^2+2p+1} = 6.$$

2. Systém je popsán přenosem

$$F(p) = \frac{p^2 + 4p + 3}{(p+4)(p^2 + 4p + 6)}.$$

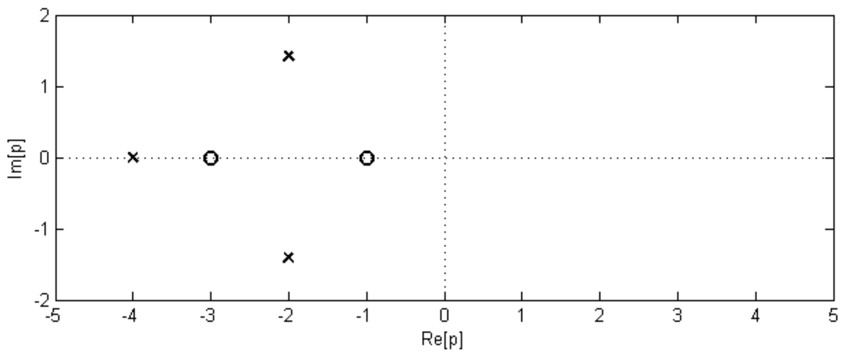
Vypočtěte póly, nuly a statické zesílení systému. Zakreslete polohu pólů a nul v komplexní rovině. Určete ustálenou hodnotu systému, jestliže na vstupu systému bude působit signál 3[t] (U(p) = 3/p).

Řešení:

Nuly a póly systému určíme výpočtem kořenů čitatele a jmenovatele přenosové funkce.

$$F(p) = \frac{(p+1)(p+3)}{(p+4)\left(p+2+j\sqrt{2}\right)\left(p+2-j\sqrt{2}\right)}$$

Systém má tedy dvě nuly $n_1 = -1$ a $n_2 = -3$, jeden reálný pól $p_1 = -4$ a dvojici komplexně sdružených pólů $p_2 = -2 - j\sqrt{2}$ a $p_3 = -2 + j\sqrt{2}$.




Statické zesílení vypočteme z upraveného tvaru obrazového přenosu

$$F(p) = \frac{p^2 + 4p + 3}{(p+4)(p^2 + 4p + 6)} = \frac{p^2 + 4p + \underline{3}}{p^3 + 8p^2 + 22p + \underline{24}} = \frac{1}{8}\,\frac{\frac{1}{3}p^2 + \frac{4}{3}p + 1}{\frac{1}{24}p^3 + \frac{1}{3}p^2 + \frac{11}{12}p + 1},$$

nebo přímo ze zadaného tvaru

$$F(p) = \frac{p^2 + 4p + \underline{3}}{(p+\underline{4})(p^2 + 4p + \underline{6})} = \frac{3}{4 \cdot 6}\,\frac{\frac{1}{3}p^2 + \frac{4}{3}p + 1}{\left(\frac{1}{4}p + 1\right)\left(\frac{1}{6}p^2 + \frac{2}{3}p + 1\right)}.$$

V obou případech vypočteme statické zesílení $Ks = 1/8$.

Ustálenou hodnotu výstupní veličiny vypočteme opět na základě Věty o koncové hodnotě.

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{p\to 0} pY(p) = \lim_{p\to 0} pU(p)F(p) = \lim_{p\to 0} p\,\frac{3}{p}\,\frac{p^2 + 4p + \underline{3}}{p^3 + 8p^2 + 22p + \underline{24}} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}.$$

3. Systém je popsán přenosem

$$F(p)=\frac{1}{(p+3)\left(2p^2+5p+2\right)}.$$

Určete póly a nuly, dále pak statické zesílení a časové konstanty systému.
Řešení:
Nuly a póly systému určíme výpočtem kořenů čitatele a jmenovatele přenosové funkce.

$$F(p)=\frac{1}{2(p+3)(p+2)(p+0.5)}$$

Systém tedy nemá žádnou nulu (resp. má nulu v nekonečnu) a tři reálné póly $p_1=-3$, $p_2=-2$ a $p_3=-0.5$.

Statické zesílení a časové konstanty systému (póly jsou reálné) vypočteme stejným způsobem jako u příkladu č. 1.

$$F(p)=\frac{1}{2(p+3)(p+2)(p+0.5)}=\frac{1}{2\cdot3\cdot2\cdot0.5}\frac{1}{\left(\frac{1}{3}p+1\right)\left(\frac{1}{2}p+1\right)(2p+1)}.$$

Časové konstanty systému jsou $T_1=1/3s$, $T_2=0.5s$ a $T_3=2s$.

Statické zesílení systému $Ks=1/6$.

4. Vypočtěte póly, nuly, jejich polohu v komplexní rovině, časové konstanty (kde to jde) a statické zesílení systémů:

   a) $F(p)=\dfrac{1}{p^2+p+1}$

   b) $F(p)=\dfrac{p+2}{(p+1)\left(p^2+2p+1\right)}$

   c) $F(p)=\dfrac{3p^2+5p+2}{\left(p^2+3p+2\right)\left(p^2+4p+3\right)}$

   d) $F(p)=\dfrac{p}{2p^2+5p+3}$

   e) $F(p)=\dfrac{p^2+3p+1}{(p+2)\left(2p^2+7p+3\right)\left(p^2+4p+1\right)}$

## Impulsní a přechodové funkce

1. Vypočtěte impulsní a přechodovou funkci systému zadaného přenosovou funkcí

$$F(p)=\frac{1}{p+2}.$$

Řešení:
Úpravou vztahu obrazového přenosu získáme vyjádření Laplaceova obrazu výstupu systému. Funkci výstupu v časové oblasti vypočteme pomocí inverzní Laplaceovy transformace[3].

$$F(p)=\frac{Y(p)}{U(p)} \quad\rightarrow\quad Y(p)=F(p)U(p) \quad\rightarrow\quad y(t)=L^{-1}\{Y(p)\}$$

Pro určení daných charakteristik je tedy nutné znát Laplaceovy obrazy Diracova pulsu a jednotkového skoku.
Impulsní funkce:

$$U(p)=L\{\delta(t)\}=1$$

$$Y(p)=G(p)=F(p)U(p)=\frac{1}{p+2}$$

$$g(t)=L^{-1}\{G(p)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{p+2}\right\}=e^{-2t}$$

Přechodová funkce:

$$U(p)=L\{1[t]\}=\frac{1}{p}$$

$$Y(p)=H(p)=F(p)U(p)=\frac{1}{p(p+2)}=\frac{r_1}{p}+\frac{r_2}{p+2}$$

Výpočet reziduí $r_1$ a $r_2$:

$$r_1=\lim_{p\to p_1}\left[H(p)(p-p_1)\right]=\lim_{p\to 0}\left[\frac{1}{p(p+2)}p\right]=\frac{1}{2}$$

$$r_2=\lim_{p\to p_2}\left[H(p)(p-p_2)\right]=\lim_{p\to -2}\left[\frac{1}{p(p+2)}(p+2)\right]=-\frac{1}{2}$$

$$h(t)=L^{-1}\{H(p)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{2p}-\frac{1}{2(p+2)}\right\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t}=\frac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right)$$

Nebo

$$h(t)=\int_0^t g(\tau)\,d\tau=\int_0^t e^{-2\tau}d\tau=-\frac{1}{2}\left[e^{-2\tau}\right]_0^t=-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2}.$$

[3] Využijeme slovník Laplaceovy transformace.

2. Vypočtěte impulsní a přechodovou funkci systému zadaného přenosovou funkcí

$$F(p)=\frac{1}{(p+2)(p+3)}.$$

Řešení:
Stejně jako u příkladu č. 1 vypočteme Laplaceovy obrazy impulsní a přechodové funkce a s využitím inverzní Laplaceovy transformace vypočteme impulsní a přechodovou funkci v časové oblasti.
Impulsní funkce:

$$Y(p)=G(p)=F(p)U(p)=\frac{1}{(p+2)(p+3)}=\frac{r_1}{p+2}+\frac{r_2}{p+3}$$

Výpočet reziduí $r_1$ a $r_2$:

$$r_1=\lim_{p\to-2}\left[G(p)(p+2)\right]=\lim_{p\to-2}\left[\frac{1}{(p+2)(p+3)}(p+2)\right]=1$$

$$r_2=\lim_{p\to-3}\left[G(p)(p+3)\right]=\lim_{p\to-3}\left[\frac{1}{(p+2)(p+3)}(p+3)\right]=-1$$

$$g(t)=L^{-1}\left\{G(p)\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{p+2}-\frac{1}{p+3}\right\}=e^{-2t}-e^{-3t}$$

Přechodová funkce:

$$Y(p)=H(p)=F(p)U(p)=\frac{1}{p(p+2)(p+3)}=\frac{r_1}{p}+\frac{r_2}{p+2}+\frac{r_3}{p+3}$$

Výpočet reziduí $r_1$, $r_2$ a $r_3$:

$$r_1=\lim_{p\to0}\left[G(p)(p)\right]=\lim_{p\to0}\left[\frac{1}{p(p+2)(p+3)}p\right]=\frac{1}{6}$$

$$r_2=\lim_{p\to-2}\left[G(p)(p+2)\right]=\lim_{p\to-2}\left[\frac{1}{p(p+2)(p+3)}(p+2)\right]=-\frac{1}{2}$$

$$r_3=\lim_{p\to-3}\left[G(p)(p+3)\right]=\lim_{p\to-3}\left[\frac{1}{p(p+2)(p+3)}(p+3)\right]=\frac{1}{3}$$

$$h(t)=L^{-1}\left\{H(p)\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{6p}-\frac{1}{2(p+2)}-\frac{1}{3(p+3)}\right\}=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{-3t}$$

Nebo

$$h(t)=\int_0^t g(\tau)d\tau=\int_0^t\left(e^{-2\tau}-e^{-3\tau}\right)d\tau=-\frac{1}{2}\left[e^{-2\tau}\right]_0^t+\frac{1}{3}\left[e^{-3\tau}\right]_0^t=-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}e^{-3t}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{-3t}$$

3. Vypočtěte impulsní a přechodovou funkci systému zadaného přenosovou funkcí

$$F(p)=\frac{1}{(p+1)^2}.$$

Řešení:

Budeme postupovat jako v předchozích případech. Vzhledem k dvojnásobnému pólu systému se bude lišit výpočet reziduí při rozkladu funkcí G(p) a H(p) na parciální zlomky.

Impulsní funkce:

$$Y(p)=G(p)=F(p)U(p)=\frac{1}{(p+1)^2}=\frac{r_1}{p+1}+\frac{r_2}{(p+1)^2}$$

Výpočet reziduí $r_1$ a $r_2$:

$$r_1={}^1r_1=\lim_{p\to-1}\left\{\frac{1}{1!}\frac{d}{dp}\left[G(p)(p+1)^2\right]\right\}=\lim_{p\to-1}\left\{\frac{d}{dp}\left[\frac{1}{(p+1)^2}(p+1)^2\right]\right\}=0$$

$$r_2={}^2r_1=\lim_{p\to-1}\left\{\frac{1}{0!}\left[G(p)(p+1)^2\right]\right\}=\lim_{p\to-1}\left\{\left[\frac{1}{(p+1)^2}(p+1)^2\right]\right\}=1$$

$$g(t)=L^{-1}\{G(p)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+1)^2}\right\}=te^{-t}$$

Přechodová funkce:

$$Y(p)=H(p)=F(p)U(p)=\frac{1}{p(p+1)^2}=\frac{r_1}{p}+\frac{r_2}{p+1}+\frac{r_3}{(p+1)^2}$$

Výpočet reziduí $r_1$, $r_2$ a $r_3$:

$$r_1=\lim_{p\to0}\left[H(p)p\right]=\lim_{p\to0}\left[\frac{1}{p(p+1)^2}p\right]=1$$

$$r_2={}^1r_2=\lim_{p\to-1}\left\{\frac{1}{1!}\frac{d}{dp}\left[H(p)(p+1)^2\right]\right\}=\lim_{p\to-1}\left\{\frac{d}{dp}\left[\frac{1}{p(p+1)^2}(p+1)^2\right]\right\}=\lim_{p\to-1}\left\{\frac{d}{dp}\left[\frac{1}{p}\right]\right\}=\lim_{p\to-1}\frac{-1}{p^2}=-1$$

$$r_3={}^2r_2=\lim_{p\to-1}\left\{\frac{1}{0!}\left[H(p)(p+1)^2\right]\right\}=\lim_{p\to-1}\left\{\left[\frac{1}{p(p+1)^2}(p+1)^2\right]\right\}=-1$$

$$h(t)=L^{-1}\{H(p)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}-\frac{1}{(p+1)^2}\right\}=1-e^{-t}-te^{-t}$$

Nebo

$$h(t)=\int_0^t g(\tau)\,d\tau=\int_0^t \tau e^{-\tau}\,d\tau=\left|\text{per partes}\right|=-te^{-t}+\int_0^t e^{-\tau}\,d\tau=1-e^{-t}-te^{-t}$$

4. Vypočtěte impulsní a přechodovou funkci systému zadaného přenosovou funkcí

$$F(p)=\frac{1}{p^2+4p+5} \quad \text{(systém má dvojici komplexně sdružených pólů)}$$

Řešení:

Impulsní funkce:

$$Y(p)=G(p)=F(p)U(p)=\frac{1}{p^2+4p+5}=\frac{1}{(p+2)^2+1}$$

$$g(t)=L^{-1}\{G(p)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+2)^2+1}\right\}=e^{-2t}\sin(t)$$

V předchozím kroku jsme pro úpravu jmenovatele přenosové funkce využili doplnění na čtverec. Pro výpočet impulsní funkce byl opět použit slovník Laplaceovy transformace. Výpočet lze provést také rozložením přenosu na parciální zlomky, určit inverzní Laplaceovu transformaci a její výsledek dále upravit.

Přechodová funkce:

$$Y(p)=H(p)=F(p)U(p)=\frac{1}{p\left(p^2+4p+5\right)}=\frac{r_1}{p}+\frac{r_2}{p-p_1}+\frac{r_3}{p-p_1^*}$$

Před výpočtem reziduí spočteme póly systému:

$$p_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}=\frac{-4\pm j2}{2}=-2\pm j$$

Výpočet reziduí $r_1$, $r_2$ a $r_3$:

$$r_1=\lim_{p\to 0}\{H(p)\,p\}=\lim_{p\to 0}\left\{\frac{1}{p\left(p^2+4p+5\right)}p\right\}=\frac{1}{5}$$

$$r_2=\lim_{p\to -2+j}\{H(p)(p+2-j)\}=\lim_{p\to -2+j}\left\{\frac{1}{p(p+2-j)(p+2+j)}(p+2-j)\right\}=\frac{-1+j2}{10}$$

$$r_3=\lim_{p\to -2-j}\{H(p)(p+2+j)\}=\lim_{p\to -2+j}\left\{\frac{1}{p(p+2-j)(p+2+j)}(p+2+j)\right\}=\frac{-1-j2}{10}$$

$$h(t)=L^{-1}\{H(p)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{5p}+\frac{-1+j2}{10(p+2-j)}+\frac{-1-j2}{10(p+2+j)}\right\}=\frac{1}{5}+\frac{-1+j2}{10}e^{(-2+j)t}+\frac{-1-j2}{10}e^{(-2-j)t}$$

Výsledek dále upravíme

$$h(t)=\frac{1}{5}+e^{-2t}\left(\frac{-1+2j}{10}e^{jt}-\frac{1+2j}{10}e^{-jt}\right)=\frac{1}{5}+e^{-2t}\left[-\frac{1}{10}\left(e^{jt}+e^{-jt}\right)+\frac{2j}{10}\left(e^{jt}-e^{-jt}\right)\right]$$

$$h(t)=\frac{1}{5}+2e^{-2t}\left[-\frac{1}{10}\cos(t)-\frac{2}{10}\sin(t)\right]=\frac{1}{5}-2e^{-2t}\left[\frac{1}{10}\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{2}{10}\sin(t)\right]=$$

$$=\frac{1}{5}-2e^{-2t}\left[A_1\sin(t+\varphi_1)+A_2\sin(t+\varphi_2)\right]=\frac{1}{5}-2e^{-2t}A\sin(t+\varphi)$$

Kde pro $A$ a $\varphi$ platí vztahy:

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}=\frac{\sqrt{5}}{10}$$

$$tg(\varphi)=\frac{A_1\sin(\varphi_1)+A_2\sin(\varphi_2)}{A_1\cos(\varphi_1)+A_2\cos(\varphi_2)}=\frac{1}{2}.$$

V přechozích úpravách jsme využili vyjádření funkcí kosinus a sinus jako lineární kombinace komplexních exponenciál a dále pak vztahy pro skládání harmonických kmitů se stejnou frekvencí a různou amplitudou a počáteční fází.

5. Vypočtěte impulsní a přechodovou funkci následujících systémů:

a) $F(p)=\dfrac{4}{p+1}$

b) $F(p)=\dfrac{1}{p(p+4)}$

c) $F(p)=\dfrac{1}{2p^2+10p+8}$

d) $F(p)=\dfrac{2}{(2p+1)^2}$

e) $F(p)=\dfrac{\pi^2}{p^2+p+\pi^2}$

## Frekvenční charakteristiky

1. Vypočtěte frekvenční přenos a určete přímkovou aproximaci frekvenční charakteristiky systému

$$F(p) = \frac{1}{p+5}$$

Řešení:
Jedná se o aperiodický systém 1. řádu. Stanovíme frekvenční přenos systému dosazením $p = j\omega$:

$$F(j\omega) = \frac{1}{5+j\omega} = \frac{1}{5+j\omega}\cdot\frac{5-j\omega}{5-j\omega} = \frac{5-j\omega}{25+\omega^2}.$$

Vyjádříme si dále reálnou a imaginární část funkce $F(j\omega)$.

$$\mathrm{Re}\left[F(j\omega)\right] = \frac{5}{25+\omega^2} = \frac{1}{5}\frac{1}{1+\frac{\omega^2}{25}},\quad \mathrm{Im}\left[F(j\omega)\right] = -\frac{\omega}{25+\omega^2} = -\frac{1}{5}\frac{\frac{\omega}{5}}{1+\frac{\omega^2}{25}}.$$

Vztahy jsme převedli na tvar:

$$\mathrm{Re}\left[F(j\omega)\right] = K\frac{1}{1+\omega^2T^2}, \mathrm{Im}\left[F(j\omega)\right] = -K\frac{\omega T}{1+\omega^2T^2}.$$

Z časové konstanty $T = 1/5s$ vypočteme zlomovou frekvenci $\omega_z = 1/T = 5rad/s$.

Amplitudová frekvenční charakteristika:

$$\left|F(j\omega)\right| = \sqrt{\mathrm{Re}\left[F(j\omega)\right]^2 + \mathrm{Im}\left[F(j\omega)\right]^2} = \sqrt{\frac{1}{25}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{\omega^2}{25}\right)^2} + \frac{\frac{\omega^2}{25}}{\left(1+\frac{\omega^2}{25}\right)^2}\right]} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{1+\frac{\omega^2}{25}}{\left(1+\frac{\omega^2}{25}\right)^2}} = \frac{1}{5}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{25}}},$$

$$\left|F(j\omega)\right|_{db} = 20\log\left(\frac{1}{5}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{25}}}\right).$$

Fázová frekvenční charakteristika:

$$\varphi(\omega) = arctg\frac{\mathrm{Im}\left[F(j\omega)\right]}{\mathrm{Re}\left[F(j\omega)\right]} = arctg\left(-\frac{\omega}{5}\right).$$

Nyní můžeme určit přímkovou aproximaci frekvenční charakteristiky.

Pro $\omega \ll 5$ platí

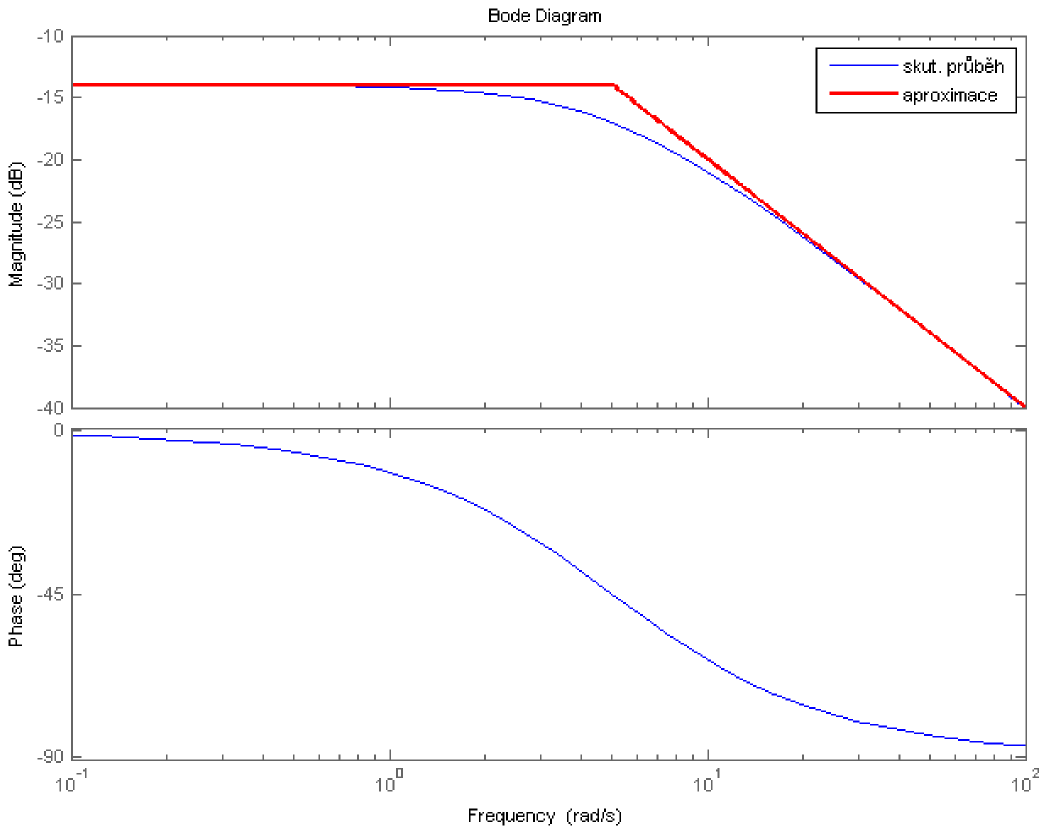
$\frac{\omega^2}{25} \ll 1$, tedy $\left|F(j\omega)\right|_{dB} = 20\log\left(\frac{1}{5}\right) \doteq -14$, pro $\omega = 5$ platí

$$\frac{\omega^2}{25} = 1 \text{, tedy } \left|F\left(j\omega\right)\right|_{dB} = 20\log\left(\frac{1}{5\sqrt{2}}\right) \doteq -17 \text{,}$$

pro $\omega \gg 5$ platí

$$\frac{\omega^2}{25} \gg 1 \text{, tedy } \left|F\left(j\omega\right)\right|_{dB} = 20\log\left(\frac{1}{5\sqrt{\frac{\omega^2}{25}}}\right) = 20\log\left(\frac{1}{\omega}\right) = -20\log\left(\omega\right).$$

Fázovou frekvenční charakteristiku aproximovat nebudeme, stanovíme však, že vzhledem k tomu, že systém nemá žádnou nulu a má 1 pól, tak se fázová charakteristika bude měnit v závislosti na frekvenci od 0° do -90° s tím, že pro $\omega = 5 rad/s$ je $\varphi(\omega) = -45°$.




2. Vypočtěte frekvenční přenos a určete přímkovou aproximaci frekvenční charakteristiky systému

$$F\left(p\right) = \frac{1}{\left(p+0.1\right)\left(p+2\right)}$$

Řešení:

Jedná se o systém druhého řádu s reálnými póly. Na tento systém můžeme nahlížet jako na dva systémy v sériové vazbě.

$$F(p)=\frac{1}{(p+2)(p+10)}=\frac{1}{p+2}\cdot\frac{1}{p+10}=F_1(p)\cdot F_2(p)$$

Pro stanovení frekvenčních charakteristik budeme postupovat stejně jako u předchozího příkladu. Celková amplitudová frekvenční charakteristika v dB je dána součtem charakteristik obou systémů.

Pro systém $F_1(p)$ platí:

$$F_1(j\omega)=\frac{1}{2+j\omega}=\frac{2-j\omega}{4+\omega^2}=\frac{2}{4+\omega^2}-j\frac{\omega}{4+\omega^2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{\omega^2}{4}}-j\frac{1}{2}\frac{\frac{\omega}{2}}{1+\frac{\omega^2}{4}} \Rightarrow \quad T_1=\frac{1}{2}s \quad \omega_{z1}=2rad/s$$

$$\left|F_1(j\omega)\right|=\sqrt{\frac{1}{4}\frac{1+\frac{\omega^2}{4}}{\left(1+\frac{\omega^2}{4}\right)^2}}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{4}}},$$

$$\left|F_1(j\omega)\right|_{dB}=20\log\left|F_1(j\omega)\right|=20\log\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{4}}}\right),$$

$$\varphi_1(\omega)=arctg\frac{\mathrm{Im}\left[F_1(j\omega)\right]}{\mathrm{Re}\left[F_1(j\omega)\right]}=arctg\left(-\frac{\omega}{2}\right).$$

Pro systém $F_2(p)$ platí:

$$F_2(j\omega)=\frac{1}{10+j\omega}=\frac{10-j\omega}{100+\omega^2}=\frac{10}{100+\omega^2}-j\frac{\omega}{100+\omega^2}=\frac{1}{10}\frac{1}{1+\frac{\omega^2}{100}}-j\frac{1}{10}\frac{\frac{\omega}{10}}{1+\frac{\omega^2}{100}} \Rightarrow \quad T_2=\frac{1}{10}s \quad \omega_{z2}=10rad/s$$

$$\left|F_2(j\omega)\right|=\sqrt{\frac{1}{100}\frac{1+\frac{\omega^2}{100}}{\left(1+\frac{\omega^2}{100}\right)^2}}=\frac{1}{10}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{100}}},$$

$$\left|F_2(j\omega)\right|_{dB}=20\log\left|F_2(j\omega)\right|=20\log\left(\frac{1}{10}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{100}}}\right),$$

$$\varphi_2(\omega)=arctg\frac{\mathrm{Im}\left[F_2(j\omega)\right]}{\mathrm{Re}\left[F_2(j\omega)\right]}=arctg\left(-\frac{\omega}{10}\right).$$

Přímková aproximace:

Pro systém $F_1(p)$

pro $\omega \ll 2$ platí

$$\frac{\omega^2}{4} \ll 1 \text{, tedy } \left|F_1(j\omega)\right|_{dB} = 20\log\left(\frac{1}{2}\right) \doteq -6$$

pro $\omega = 2$ platí

$$\frac{\omega^2}{4} = 1 \text{, tedy platí } \left|F_1(j\omega)\right|_{dB} = 20\log\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \doteq -9$$

pro $\omega \gg 2$ platí

$$\frac{\omega^2}{4} \gg 1 \text{, tedy platí } \left|F_1(j\omega)\right|_{dB} = 20\log\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{\omega^2}{4}}}\right) = -20\log(\omega)$$

Pro systém $F_2(p)$

pro $\omega \ll 10$ platí

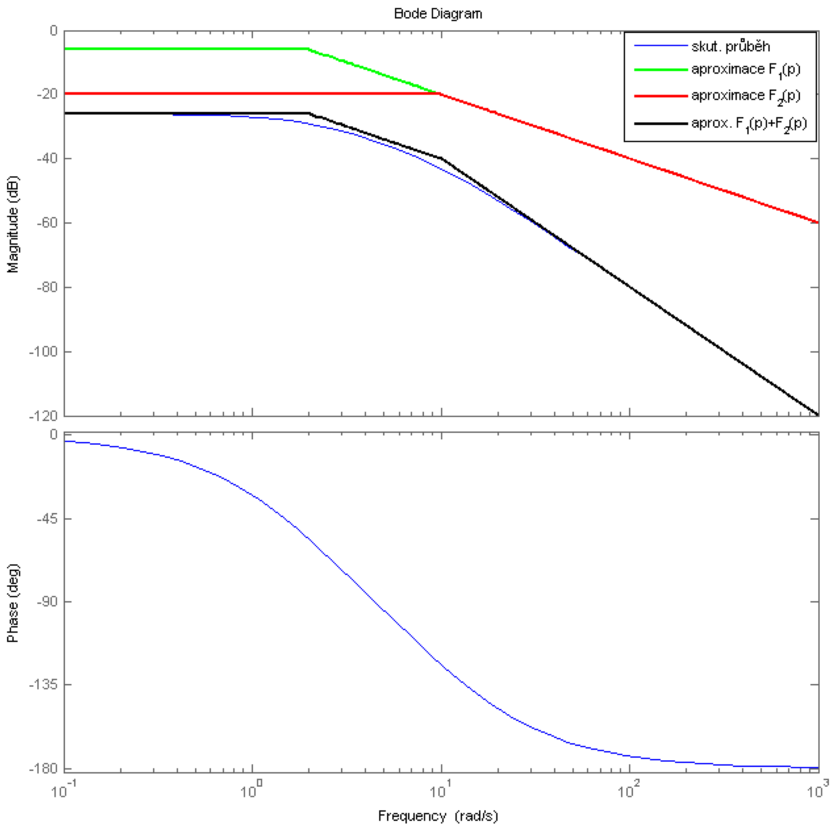
$$\frac{\omega^2}{100} \ll 1 \text{, tedy } \left|F_2(j\omega)\right|_{dB} = 20\log\left(\frac{1}{10}\right) \doteq -20$$

pro $\omega = 10$ platí

$$\frac{\omega^2}{100} = 1 \text{, tedy platí } \left|F_2(j\omega)\right|_{dB} = 20\log\left(\frac{1}{10\sqrt{2}}\right) \doteq -23$$

pro $\omega \gg 10$ platí

$$\frac{\omega^2}{100} \gg 1 \text{, tedy } \left|F_2(j\omega)\right|_{dB} = 20\log\left(\frac{1}{10}\frac{1}{\sqrt{\frac{\omega^2}{100}}}\right) = -20\log(\omega).$$




3. Vypočtěte frekvenční přenos a určete přímkovou aproximaci frekvenční charakteristiky systému

$$F(p) = \frac{16}{p^2 + p + 16}$$

Řešení:
Jedná se o systém druhého řádu, s dvojicí komplexně sdružených pólů.
Frekvenční přenos:

$$F(j\omega) = \frac{16}{(j\omega)^2 + j\omega + 16} = \frac{16}{16 - \omega^2 + j\omega} = \frac{16}{16 - \omega^2 + j\omega} \cdot \frac{16 - \omega^2 - j\omega}{16 - \omega^2 - j\omega} =$$

$$= \frac{16\left(16 - \omega^2\right)}{\left(16 - \omega^2\right)^2 + \omega^2} - j\frac{16\omega}{\left(16 - \omega^2\right)^2 + \omega^2}$$

Amplitudová frekvenční charakteristika:

$$\left|F(j\omega)\right| = \sqrt{\frac{16^2\left[\left(16-\omega^2\right)^2+\omega^2\right]}{\left[\left(16-\omega^2\right)^2+\omega^2\right]^2}} = \sqrt{\frac{16^2}{\left(16-\omega^2\right)^2+\omega^2}} = \sqrt{\frac{16^2}{16^2\left[\left(1-\frac{\omega^2}{16}\right)^2+\frac{\omega^2}{16^2}\right]}} = \sqrt{\frac{1}{\left(1-\frac{\omega^2}{16}\right)^2+\frac{\omega^2}{16^2}}}$$

$$\left|F(j\omega)\right|_{dB} = 20\log\sqrt{\frac{1}{\left(1-\frac{\omega^2}{16}\right)^2+\frac{\omega^2}{16^2}}}$$

Zlomová frekvence frekvenční charakteristiky je $\omega_z = \omega_n = 4 rad/s$.

Fázová frekvenční charakteristika:

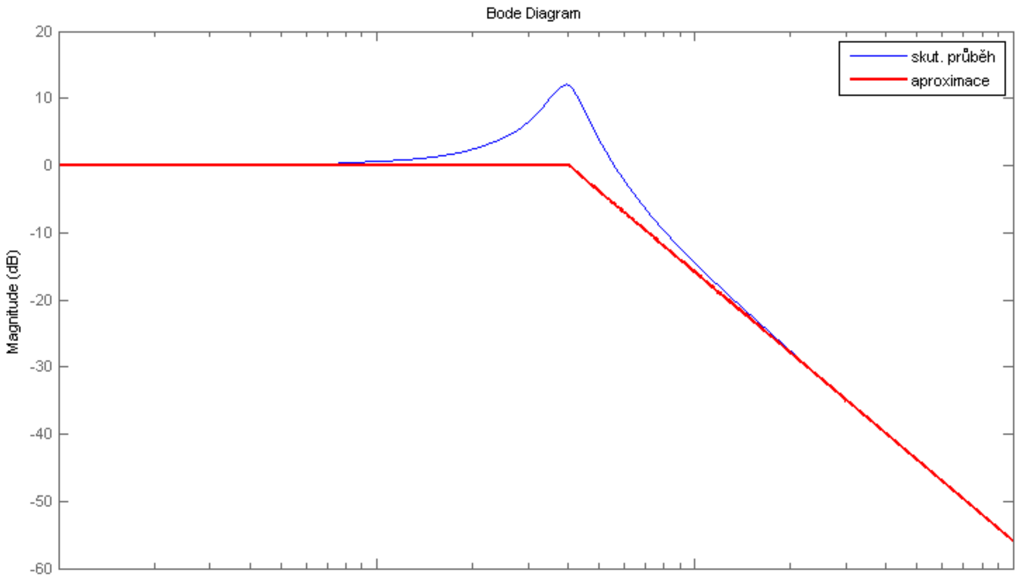
$$\varphi(\omega) = arctg\left(-\frac{\omega}{16-\omega^2}\right)$$

Přímková aproximace:

pro $\omega \ll 4$ je $\frac{\omega^2}{16} \ll 1$ a tedy $\left|F(j\omega)\right|_{dB} = 20\log 1 = 0$,

pro $\omega = 4$ je $\frac{\omega^2}{16} = 1$ a tedy $\left|F(j\omega)\right|_{dB} = 20\log 4 \doteq 12$,

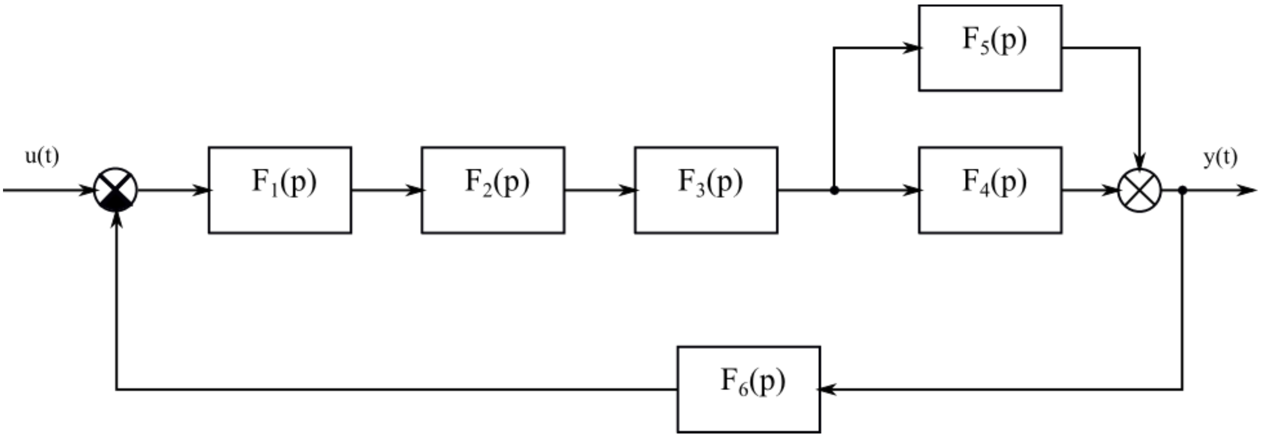
pro $\omega \gg 4$ je $\frac{\omega^2}{16} \gg 1$ a tedy $\left|F(j\omega)\right|_{dB} = 20\log\frac{16}{\omega^2} = 24 - 40\log\omega$,




K maximálnímu rozdílu mezi skutečným průběhem amplitudové charakteristiky a její aproximace dochází na frekvenci netlumeného systému a tato chyba je rovna $-20\log 2\xi\ dB$.

## Algebra blokových schémat

1. Použijte základní pravidla algebry blokových schémat pro úpravu následujícího zapojení

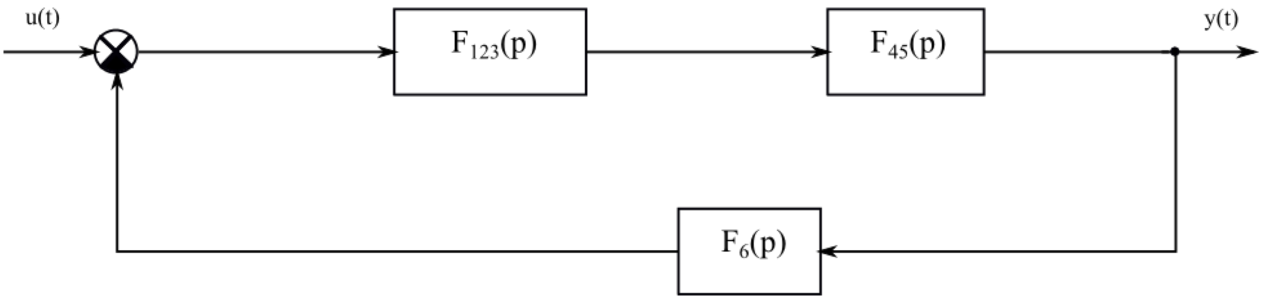



Řešení:
Jedná se o zpětnovazební sérioparalelní zapojení.
Přenosy $F_1(p)$, $F_2(p)$ a $F_3(p)$ jsou zapojeny v sériově, celkový přenos tohoto spojení tedy je

$$F_{123}(p) = F_1(p)F_2(p)F_3(p).$$

Přenosy $F_5(p)$ a $F_6(p)$ jsou zapojeny paralelně, celkový přenos tohoto spojení tedy je

$$F_{56}(p) = F_5(p) + F_6(p).$$



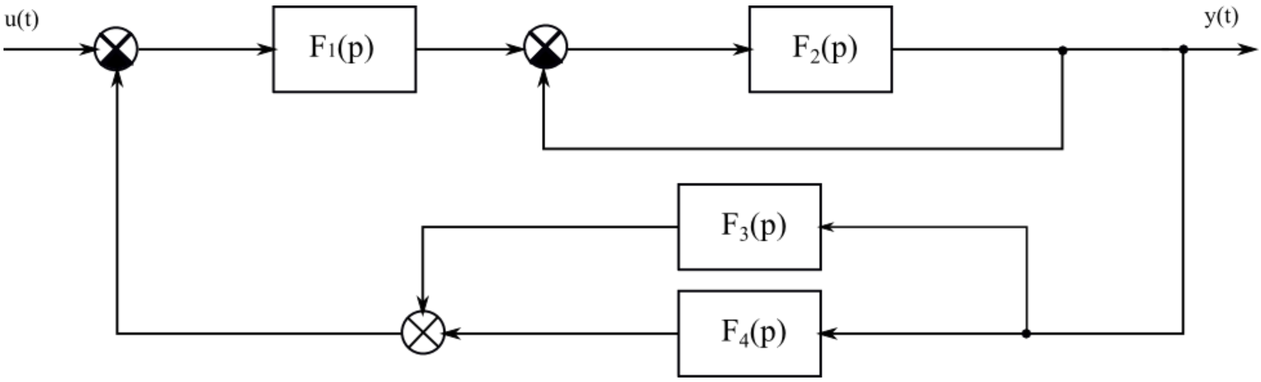

Přenosy $F_{123}(p)$ a $F_{45}(p)$ jsou zapojeny sériově. Výsledný přenos této kombinace je

$$F_{12345}(p) = F_{123}(p)F_{45}(p).$$

Tento systém má ve zpětné vazbě zapojený přenos $F_6(p)$. Podle pravidel algebry blokových schémat tedy celkový přenos stanovíme vztahem

$$F_{123456}(p) = \frac{F_{12345}(p)}{1 + F_{12345}(p)F_6(p)}.$$

2. Použijte základní pravidla algebry blokových schémat pro úpravu následujícího zapojení



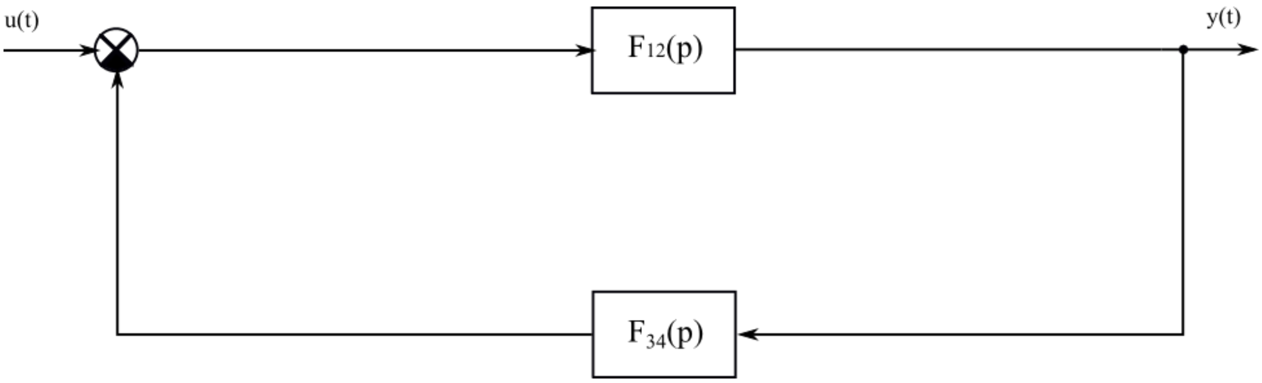

Řešení:

Zprvu se zaměříme na přímovazební větev obvodu. Zde je zapojen systém s přenosem $F_1(p)$ v sérii se zpětnovazebním obvodem, v jehož přímé vazbě je systém s přenosem $F_2(p)$ a zpětná vazba je jednotková. Celkový přenos tohoto zapojení je

$$F_{12}(p) = F_1(p)\frac{F_2(p)}{1+F_2(p)}.$$

Nyní se zaměříme na zpětnovazební smyčku hlavního obvodu. Zde je paralelní spojení systémů s přenosy $F_3(p)$ a $F_4(p)$ (všimněte si směru toku informace). Toho spojení lze popsat přenosem

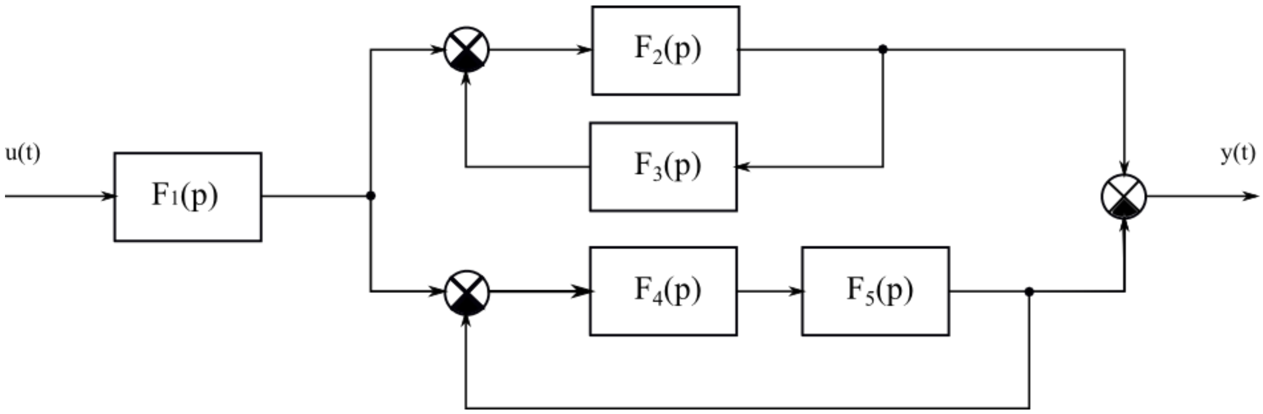
$$F_{34}(p) = F_3(p) + F_4(p).$$




Po těchto úpravách získáme jednoduché zpětnovazební zapojení s přenosem $F_{12}(p)$ v přímé větvi a přenosem $F_{34}(p)$ ve zpětnovazební větvi. Výsledný přenos, popisující dané zapojení, tedy je

$$F_{1234}(p) = \frac{F_{12}(p)}{1+F_{12}(p)F_{34}(p)}.$$

3. Použijte základní pravidla algebry blokových schémat pro úpravu následujícího zapojení



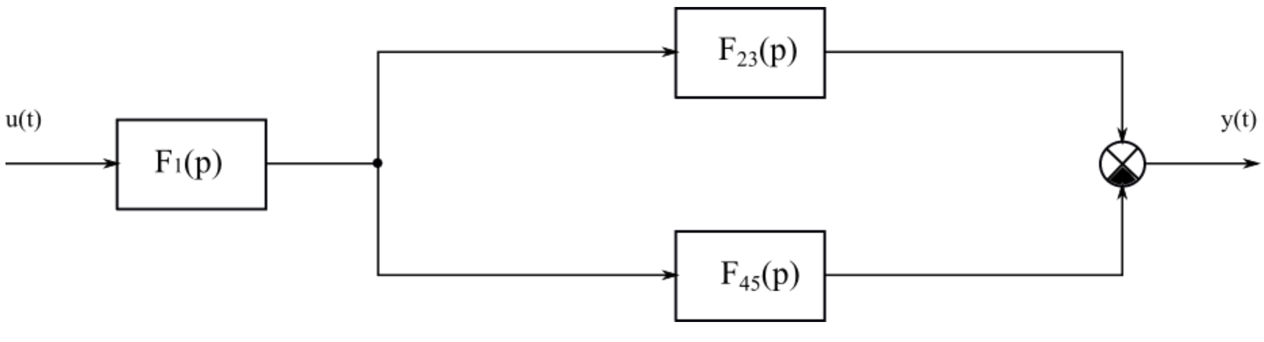

Řešení:
Zapojení se skládá ze sérioparalelního spojení, kde se paralelní spojení skládá ze dvou zpětných vazeb. Zprvu určíme přenosy obou zpětných vazeb a nakonec vypočteme celkový přenos obvodu.
Přenos prvního zpětnovazebního zapojení:

$$F_{23}(p) = \frac{F_2(p)}{1 + F_2(p)F_3(p)}.$$

Přenos druhého zpětnovazebního zapojení:

$$F_{45}(p) = \frac{F_4(p)F_5(p)}{1 + F_4(p)F_5(p)}.$$

Náhradní schéma zapojení:

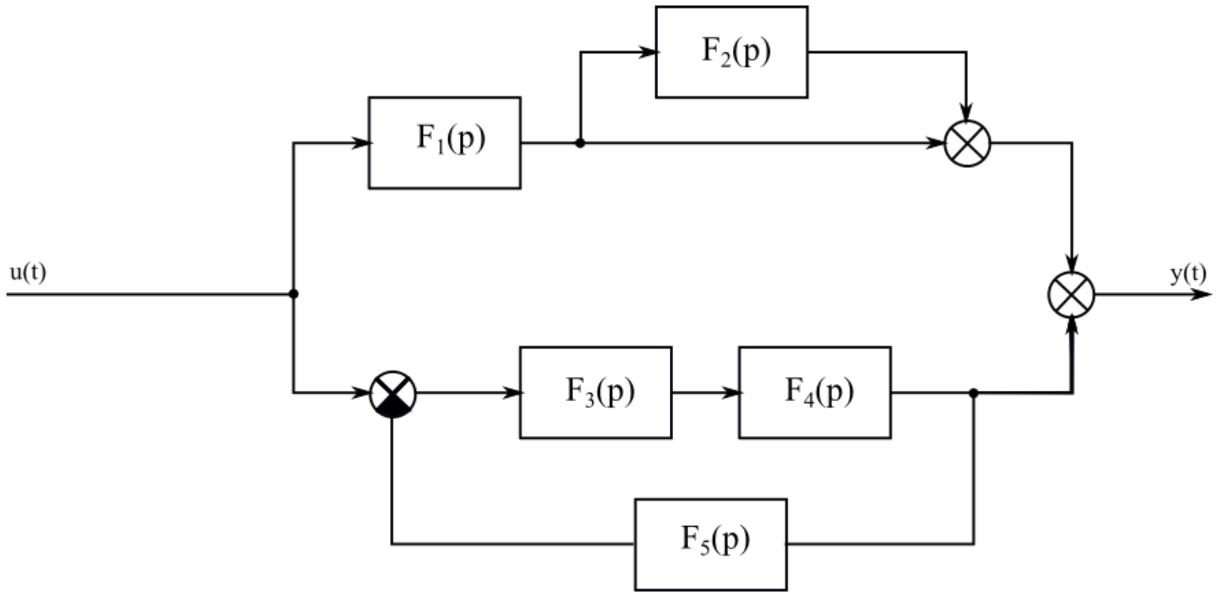



Celkový přenos zapojení tedy je:

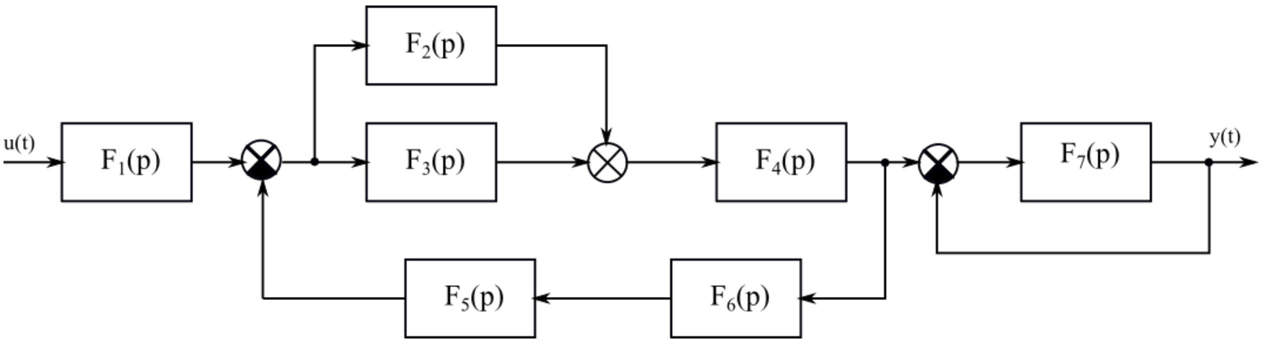
$$F_{12345}(p) = F_1(p)\left(F_{23}(p) - F_{45}(p)\right).$$

4. S využitím základních pravidel algebry blokových schémat zjednodušte následující zapojení

a)




b)



## Vnitřní popis systému

1. Určete vnitřní popis systému popsaného lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty

$$\ddot{y}(t)+2\dot{y}(t)+y(t)=3u(t)$$

Řešení:
Zpočátku zvolíme stavové proměnné, které tvoří stavový vektor systému. Vzhledem k tomu, že systém je 2. řádu, bude počet proměnných 2:

Existuje nekonečně mnoho způsobů jak volit stavové proměnné. Toto je pouze jeden z nich.

$$x_1(t)=y(t)$$
$$x_2(t)=\dot{y}(t).$$

Nyní obě stavové proměnné zderivujeme podle času:

$$\dot{x}_1(t)=\dot{y}(t)$$
$$\dot{x}_2(t)=\ddot{y}(t).$$

Cílem je vyjádřit derivace stavových proměnných jako lineární kombinace složek vektoru stavu.
Vzhledem k tomu, že $x_2(t)=\dot{y}(t)$ a $\dot{x}_1(t)=\dot{y}(t)$, pak tedy můžeme psát $\dot{x}_1(t)=x_2(t)$. Tím jsme vyjádřili derivaci první stavové proměnné. Otázkou je, jak vyjádřit $\dot{x}_2(t)$. Ze zadané diferenciální rovnice je možné vyjádřit druhou derivaci y(t) jako lineární kombinaci funkce y(t) a její první derivace a také vstupu u(t):

$$\ddot{y}(t)=-y(t)-2\dot{y}(t)+3u(t).$$

Dosaďme do tohoto předpisu stavové proměnné a jejich derivace:

$$\dot{x}_2(t)=-x_1(t)-2x_2(t)+3u(t).$$

Nyní můžeme zapsat získané rovnice v maticovém tvaru. Rovnice pro derivaci stavového vektoru tvoří stavovou rovnici systému. Výstupní rovnici získáme z rovnice pro první složku vektoru stavu:

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix}u(t)$$
$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}.$$

2. Určete vnitřní popis systému popsaného lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty

$$3y^{(4)}(t)+4y^{(3)}(t)+\ddot{y}(t)+2\dot{y}(t)+3y(t)=2u(t)$$

Řešení:

Zvolíme stavové proměnné a vypočteme jejich derivaci podle času.

$$\begin{array}{lcl}
x_1(t)=y(t) & & \dot{x}_1(t)=\dot{y}(t) \\
x_2(t)=\dot{y}(t) & \Rightarrow & \dot{x}_2(t)=\ddot{y}(t) \\
x_3(t)=\ddot{y}(t) & & \dot{x}_3(t)=y^{(3)}(t) \\
x_4(t)=y^{(3)}(t) & & \dot{x}_4(t)=y^{(4)}(t)
\end{array}$$

Derivace prvních tří stavových proměnný můžeme vyjádřit pomocí nederivovaných složek vektoru stavu. Derivaci čtvrté složky vektoru stavu určíme stejně jako v předchozím příkladu, tj. vyjádříme nejvyšší stupeň derivace funkce y(t) jako funkci nižších derivací y(t) a vstupu u(t) a ty následně nahradíme složkami stavového vektoru.

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t)=x_3(t)$$
$$\dot{x}_3(t)=x_4(t)$$
$$\dot{x}_4(t)=y^{(4)}(t)=-y(t)-\frac{2}{3}\dot{y}(t)-\frac{1}{3}\ddot{y}(t)-\frac{4}{3}y^{(3)}(t)+\frac{2}{3}u(t)=-x_1(t)-\frac{2}{3}x_2(t)-\frac{1}{3}x_3(t)-\frac{4}{3}x_4(t)+\frac{2}{3}u(t).$$

Získané vztahy zapíšeme maticově, čímž získáme stavovou rovnici systému. Výstupní rovnice je dána vztahem pro první složku stavového vektoru $x(t)$.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\\ \dot{x}_4(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \frac{2}{3}\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\end{bmatrix}$$

Možná jste si všimli, že tento způsob volby stavových proměnných, nazvaný Metoda snižování řádu derivace, vede vždy na velmi podobný stav stavových rovnic systému. Jestliže vynecháme v matici dynamiky A první řádek a první sloupec, získáme matici s 1 na diagonále. Poslední řádek matice dynamiky A je obvykle tvořen záporně vzatými koeficienty LDR $a_{n-1}$ - $a_0$, dělenými koeficientem $a_n$. Prvky výstupní matice B (v tomto případě vektoru), jsou až na poslední rovny 0 a poslední je roven podílu $b_0/a_n$. Výstupní matice (vektor) C má všechny prvky rovny nule, kromě prvního, který je 1. Tudíž lze stavový popis určit bez odvozování, pouze z tvaru LDR. Tyto závěry platí pouze pro systémy, které jsou popsány LDR, ve které nevystupují derivace vstupního signálu u(t).

3. Stanovte vnitřní popis systému popsaného lineární diferenciální rovnicí s konstantními koeficienty

$$y^{(3)}(t)+2\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+y(t)=5\dot{u}(t)+u(t)$$

Řešení:
Definujme pomocnou proměnnou z(t), která bude vyhovovat rovnicím:

$$\begin{aligned} y(t)&=5\dot{z}(t)+z(t)\\ u(t)&=z^{(3)}(t)+2\ddot{z}(t)+3\dot{z}(t)+z(t). \end{aligned}$$

Podobně jako u předchozích příkladů definujeme stavové proměnné a spočteme jejich časové derivace:

$$\begin{array}{lcl} x_1(t)=z(t) & & \dot{x}_1(t)=\dot{z}(t)=x_2(t)\\ x_2(t)=\dot{z}(t) & \Rightarrow & \dot{x}_2(t)=\ddot{z}(t)=x_3(t)\\ x_3(t)=\ddot{z}(t) & & \dot{x}_3(t)=z^{(3)}(t) \end{array}$$

Derivaci $x_3(t)$ si vyjádříme ze vztahu mezi z(t) a u(t):

$$\dot{x}_3(t)=z^{(3)}(t)=-2\ddot{z}(t)-3\dot{z}(t)-z(t)+u(t)=-2x_3(t)-3x_2(t)-x_1(t)+u(t).$$

Předchozí rovnice můžeme zapsat v maticovém tvaru:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&-3&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1&5&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{bmatrix}.$$

Matice A i B mají stejný tvar, jako v případě, kdy v LDR nevystupuje na pravé straně derivace vstupu u(t). Dále si můžeme všimnout, že výstupní matice C se skládá z koeficientů pravé strany LDR $b$ vydělených koeficientem $a_3=1$ - koeficient u nejvyšší derivace funkce y(t).

## Modelování LDS

1. Stanovte simulační schéma pro lineární dynamický systém popsaný LDR

$$y^{(3)}(t)+\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+2y(t)=4u(t).$$

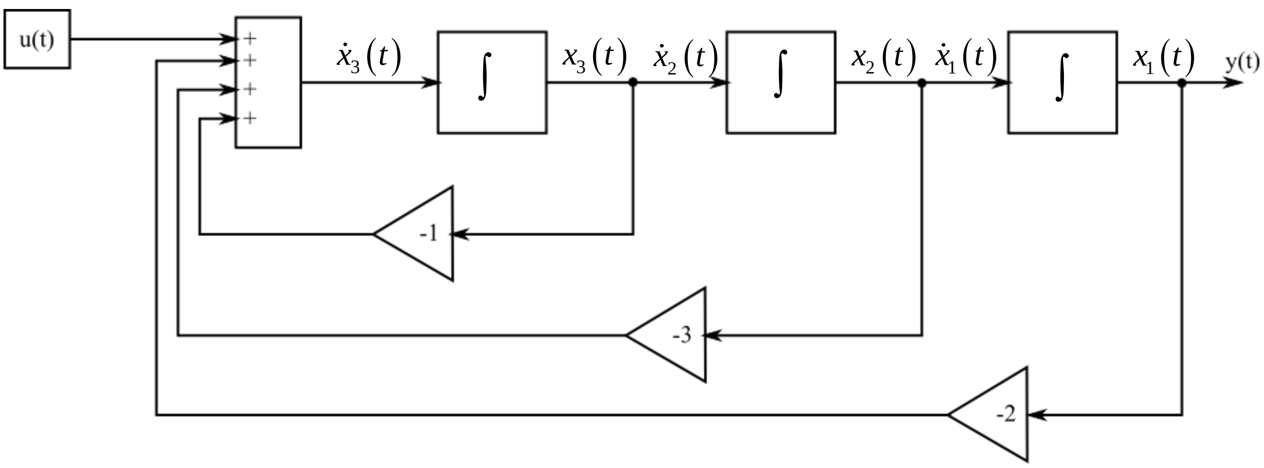
Řešení:

Stejným způsobem, jako u stanovení vnitřního popisu, definujeme stavové proměnné metodou snižování řádu derivace. Následně vyjádříme jejich časové derivace jako lineární kombinace nederivovaných složek vektoru stavu.

$$x_1(t) = y(t) \qquad \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)$$
$$x_2(t) = \dot{y}(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = x_3(t)$$
$$x_3(t) = \ddot{y}(t) \qquad \dot{x}_3(t) = y^{(3)}(t) = -2x_1(t) - 3x_2(t) - x_3(t) + 4u(t)$$

Základem simulačního schématu jsou tři integrátory, tedy členy integrující jejich vstupní signál.

Integrátory jsou zapojeny sériově. Vstupem prvního integrátoru je $\dot{x}_3(t)$, který je součtem signálu u(t) a výstupů jednotlivých integrátorů (zpětná vazba).




Výstup systému sledujeme na výstupu posledního integrátoru – plyne ze vztahu $x_1(t) = y(t)$.

$\dot{x}_3(t)$

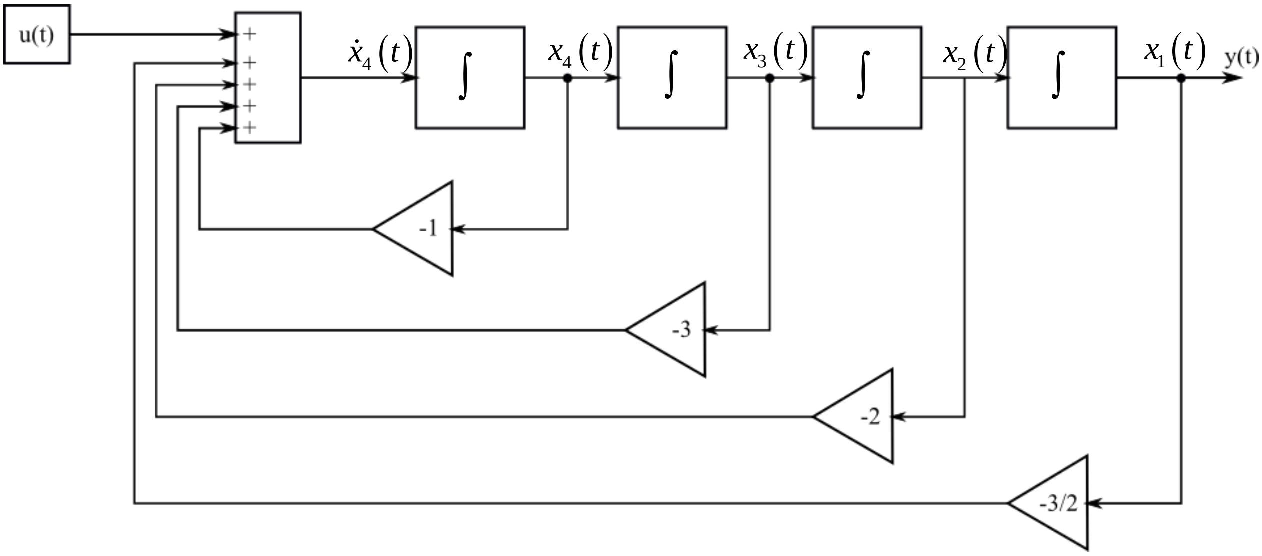
2. Stanovte simulační schéma pro systém popsaný LDR

$$2y^{(4)}(t)+2y^{(3)}(t)+6\ddot{y}(t)+4\dot{y}(t)+3y(t)=2u(t).$$

Řešení:

Metodou snižování řádu derivace stanovíme stavové proměnné $x_1(t)$ až $x_4(t)$:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \\ x_3(t) &= \ddot{y}(t) \\ x_4(t) &= y^{(3)}(t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{y}(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) &= y^{(3)}(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) &= y^{(4)}(t) = -3/2x_1(t)-2x_2(t)-3x_3(t)-x_4(t)+u(t) \end{aligned}$$



3. Stanovte simulační schéma pro systém zadaný LDR

$$y^{(3)}(t)+\ddot{y}(t)+2\dot{y}(t)+3y(t)=\ddot{u}(t)+\dot{u}(t)+2u(t).$$

Řešení:

Zavedeme pomocnou proměnnou z(t), která bude vyhovovat rovnicím:

$$y(t)=\ddot{z}(t)+\dot{z}(t)+2z(t)$$
$$u(t)=z^{(3)}(t)+\ddot{z}(t)+2\dot{z}(t)+3z(t).$$

S využitím této proměnné definujeme stavové proměnné $x_1(t)$ až $x_3(t)$. Následně vypočteme jejich časové derivace, které vyjádříme jako lineární kombinace nederivovaných stavových proměnných a vstupu $u(t)$.

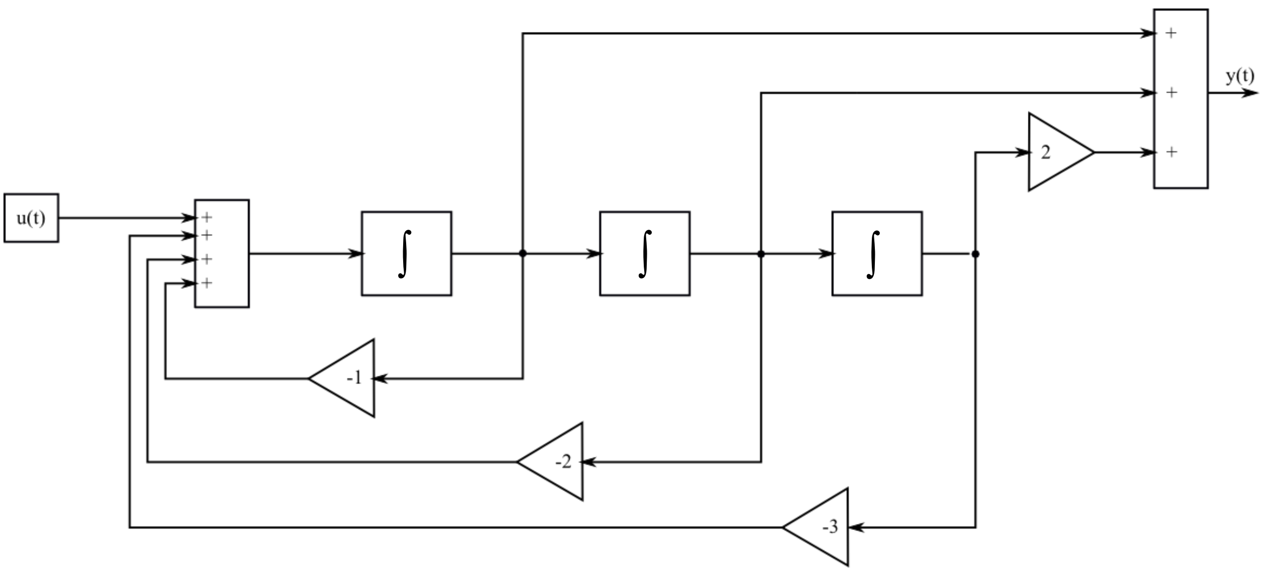
$$x_1(t)=z(t)$$
$$x_2(t)=\dot{z}(t)$$
$$x_3(t)=\ddot{z}(t)$$

Časové derivace stavových proměnných:

$$\dot{x}_1(t)=\dot{z}(t)$$
$$\dot{x}_2(t)=\ddot{z}(t)$$
$$\dot{x}_3(t)=z^{(3)}(t)=-3z(t)-2\dot{z}(t)-\ddot{z}(t)+u(t)=-3x_1(t)-2x_2(t)-x_3(t)+u(t).$$

Pro výstup systému platí:

$$y(t)=2x_1(t)+x_2(t)+x_3(t).$$



## Rovnovážné stavy systému

Vypočtěte rovnovážné stavy lineárních dynamických systémů a určete jejich typ:

a) $\ddot{y}(t)+2y(t)=0,$

b) $\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+5y(t)=0,$

c) $\ddot{y}(t)+4\dot{y}(t)+3y(t)=0,$

Řešení:

a) Určíme vnitřní popis systému:

$$\begin{aligned} x_1(t)&=y(t) \\ x_2(t)&=\dot{y}(t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}_1(t)&=\dot{y}(t)=x_2(t) \\ \dot{x}_2(t)&=\ddot{y}(t)=-2y(t)=-2x_1(t) \end{aligned}$$

Vnitřní/stavový popis systému:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},\ y(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Vypočteme rovnovážné stavy systému:

$$Ax_r=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{r1}(t) \\ x_{r2}(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_r(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jelikož je matice A regulární, existuje jediné (triviální) řešení $x_r=0$. Nyní určíme na základě vlastních čísel matice dynamiky A, o jaký typ rovnovážného stavu se jedná.

$$|\lambda I-A|=\left|\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\right|=\left|\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda \end{bmatrix}\right|=\lambda^2+2=0$$

Charakteristická rovnice má řešení:

$$\lambda_{1,2}=\pm j\sqrt{2}\,.$$

Jedná se tedy o rovnovážných stav typu střed.

b) Určíme vnitřní popis systému:

$$x_1(t) = y(t) \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)$$
$$x_2(t) = \dot{y}(t) \qquad\qquad \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = -5y(t) - 3\dot{y}(t) = -5x_1(t) - 3x_2(t)$$

Vnitřní/stavový popis systému:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \; y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Vzhledem k tomu, že je matice A regulární, má systém rovnovážný stav $x_r = 0$. Typ rovnovážného stavu určíme na základě výpočtu vlastních čísel matice A.

$$\left|\lambda I - A\right| = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 5 & \lambda + 3 \end{bmatrix} \right| = \lambda^2 + 3\lambda + 5 = 0$$

Řešení charakteristické rovnice:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-20}}{2} = \frac{-3 \pm j\sqrt{11}}{2}.$$

Rovnovážný stav $x_r$ je typu ohnisko.

c) Vypočteme vnitřní popis systému:

$$x_1(t) = y(t) \qquad \Rightarrow \qquad \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)$$
$$x_2(t) = \dot{y}(t) \qquad\qquad \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) = -3y(t) - 4\dot{y}(t) = -3x_1(t) - 4x_2(t)$$

Vnitřní/stavový popis systému:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \; y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Matice A je regulární a systém má tedy jeden rovnovážný stav $x_r = 0$. Typ rovnovážného stavu určíme z výpočtu vlastních čísel matice dynamiky A.

$$\left|\lambda I - A\right| = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 3 & \lambda + 4 \end{bmatrix} \right| = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0.$$

Řešení charakteristické rovnice:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \left\langle \begin{matrix} -1 \\ -3 \end{matrix} \right. \qquad \Rightarrow$$

Rovnovážný stav je typu uzel.

## Stabilita LDS

1. Vyšetřete stabilitu následujících lineárních dynamických systémů:

   a) $\ddot{y}(t)+4\dot{y}(t)+2y(t)=u(t)$

   b) $3\ddot{y}(t)+5\dot{y}(t)+6y(t)=u(t)$

   c) $2\ddot{y}(t)+y(t)=u(t)$

   d) $\ddot{y}(t)-\dot{y}(t)+3y(t)=u(t)$

   e) $\ddot{y}(t)+4\dot{y}(t)-2y(t)=u(t)$

U všech diferenciálních rovnic předpokládejte nulové počáteční podmínky.

Řešení:

a) Vypočteme přenos systému a následným výpočtem pólů rozhodneme o stabilitě LDS.

$$F(p)=\frac{1}{p^2+4p+2}.$$

Póly systému tedy jsou:

$p_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-8}}{2}=-2\pm\sqrt{2}$. Póly systému leží v levé komplexní polorovině a systém je tedy stabilní.

b) Postup je stejný jako u předchozího příkladu. Napřed určíme přenos systému.

$$F(p)=\frac{1}{3p^2+5p+6}.$$

Póly systému:

$p_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{25-72}}{6}=\dfrac{-5\pm j\sqrt{47}}{6}$. Reálná část pólů systému je záporná, póly tedy leží v levé komplexní polorovině a systém je stabilní.

c) Postupujeme stejně jako v předchozích příkladech. Napřed vypočteme přenos systému.

$$F(p)=\frac{1}{2p^2+1}$$

Póly systému:

$p_{1,2}=\dfrac{\pm j\sqrt{8}}{2}=\pm j\sqrt{2}$. Póly systému leží na imaginární ose komplexní roviny. Systém je na mezi stability.

d) Vypočteme přenos systému:

$$F(p)=\frac{1}{p^2-p+3}.$$

Stanovíme póly systému:

$p_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1-12}}{2}=\dfrac{1\pm j\sqrt{11}}{2}$. Póly systému jsou komplexně sdružené. Reálná část pólů je kladná, póly leží v pravé komplexní polorovině a systém je tedy nestabilní.

e) Stanovíme přenos systému:

$$F(p)=\frac{1}{p^2+4p-2}$$

Vypočteme póly systému:

$p_{1,2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+8}}{2}=-2\pm\sqrt{6}$. Vzhledem k tomu, že $\sqrt{6}>2$ leží jeden z pólů v pravé komplexní polorovině a systém je nestabilní.

Vzhledem k tomu, že se jedná o systémy druhého řádu, je možné o stabilitě rozhodnout na základě splnění/nesplnění nutné podmínky stability. Ta říká, že systém je stabilní, jestliže jsou všechny koeficienty charakteristického polynomu (shodný s polynomem ve jmenovateli přenosu) nenulové a mají stejná znaménka. Použitím této podmínky bychom okamžitě zjistili, že systémy a) až c) jsou stabilní a systémy d) a e) jsou nestabilní.
Jako samostatné cvičení si pro systémy a) až e) určete vnitřní popis a vypočtěte vlastní čísla matice dynamiky (návod naleznete v předchozí sekci). Ověřte, že se vlastní čísla matice dynamiky rovnají pólům systému.

2. S využitím Hurwitzova kritéria stability rozhodněte o stabilitě následujících LDS

a) $y^{(3)}(t)+4\ddot{y}(t)+5\dot{y}(t)+y(t)=0$

b) $y^{(4)}(t)+3y^{(3)}(t)+3\ddot{y}(t)+2\dot{y}(t)+2y(t)=u(t)$

c) $y^{(4)}(t)+3y^{(3)}(t)+3\ddot{y}(t)+2\dot{y}(t)+y(t)=u(t)$

Řešení:

a) Stanovíme přenos systému, ze kterého určíme jeho charakteristický polynom.
Přenos:

$$F(p)=\frac{1}{p^3+4p^2+5p+1}.$$

Charakteristický polynom:

$$a(p)=p^3+4p^2+5p+1.$$

Všechny koeficienty charakteristického polynomu jsou nenulové a mají stejná znaménka. Nutná podmínka stability je splněna a má tedy smysl vyšetřovat stabilitu systému.
Z koeficientů charakteristického polynomu sestavíme Hurwitzovu matici H (3x3).

$$H=\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dále vypočteme Hurwitzovy determinanty $H_1$ až $H_3$.

$$H_1 = a_{n-1} = a_2 = 4$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 1 = 19$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = a_0 H_2 = 19$$

Všechny Hurwitzovy determinanty jsou větší než nula a dynamický systém je tedy stabilní.

Výpočtem lze ověřit, že póly systému jsou $p_{1,2} \doteq -1.88 \pm j\sqrt{0.75},\ p_3 = -0.25$.

b) Stanovíme charakteristický polynom a Hurwitzovu matici.

Přenos systému:

$$F(p) = \frac{1}{p^4 + 3p^3 + 3p^2 + 2p + 2}.$$

Charakteristický polynom tedy je:

$$a(p) = p^4 + 3p^3 + 3p^2 + 2p + 2.$$

Nutná podmínka stability je splněna – koeficienty u všech mocnin p jsou nenulové a mají stejná znaménka. Z koeficientů charakteristického polynomu stanovíme podle obecného postupu Hurwitzovu matici (4x4).

$$H = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Výpočet Hurwitzových determinantů:

$$H_1 = a_{n-1} = a_3 = 3$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 18 - 18 - 4 = -4$$

$$H_4 = a_0 H_3 = -8$$

Hurwitzovy determinanty $H_3$ a $H_4$ jsou záporné a systém je tedy nestabilní! Pokud si vypočtete póly systému (kořeny charakteristického polynomu) zjistíte, že systém má dvě dvojice komplexně sdružených pólů, kdy jedna dvojice leží v levé a druhá dvojice leží v pravé komplexní polorovině ( $p_{1,2} \doteq -1.57 \pm j0.46,\ p_{3,4} \doteq 0.07 \pm j0.86$ ).

c) Určíme charakteristický polynom a Hurwitzovu matici.
Přenos systému:

$$F(p) = \frac{1}{p^4 + 3p^3 + 3p^2 + 2p + 1}$$

Charakteristický polynom:

$$a(p) = p^4 + 3p^3 + 3p^2 + 2p + 1$$

Hurwitzova matice:

$$H = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Hurwitzovy determinanty H1 a H2 jsou stejné jako u předchozího příkladu.

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 18 - 9 - 4 = 5$$

$$H_4 = a_0 H_3 = 5$$

Všechny Hurwitzovy determinanty jsou kladné a nenulové a systém je tedy stabilní (všimněte si, že systémy v bodech b) a c) se liší pouze koeficientem $a_0$).

## Stabilita NDS

1. Pomocí první Ljapunovovy metody vyšetřete stabilitu rovnovážných stavů nelineárního systému

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}^3(t) + b\dot{y}(t) + y(t) = 0$$

Řešení:
Určíme vnitřní popis systému a vypočteme rovnovážné stavy. Stejným způsobem jako u lineárních systémů použijeme metodu snižování řádu derivace

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{y}(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \ddot{y}(t) = -\dot{y}^3(t) - b\dot{y}(t) - y(t) = -x_2^3(t) - bx_2(t) - x_1(t) \end{aligned}$$

Nyní můžeme vypočítat rovnovážný stav. Pro rovnovážný stav platí, že derivace vektoru stavu jsou rovny nule (tj. nedochází ke změnám v systému). To splňuje pouze jeden rovnovážný stav $x_r = [0,0]^T$. Nyní provedeme lineární aproximaci systému v blízkém okolí rovnovážného stavu. Matice dynamiky linearizovaného LDS:

$$A = \left.\frac{\partial f\left(x(t)\right)}{\partial x}\right|_{x(t)=x_r} = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1\left(x_1, x_2\right)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1\left(x_1, x_2\right)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2\left(x_1, x_2\right)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2\left(x_1, x_2\right)}{\partial x_2} \end{bmatrix}\right|_{x(t)=x_r} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -b \end{bmatrix}.$$

Vypočteme vlastní čísla matice dynamiky:

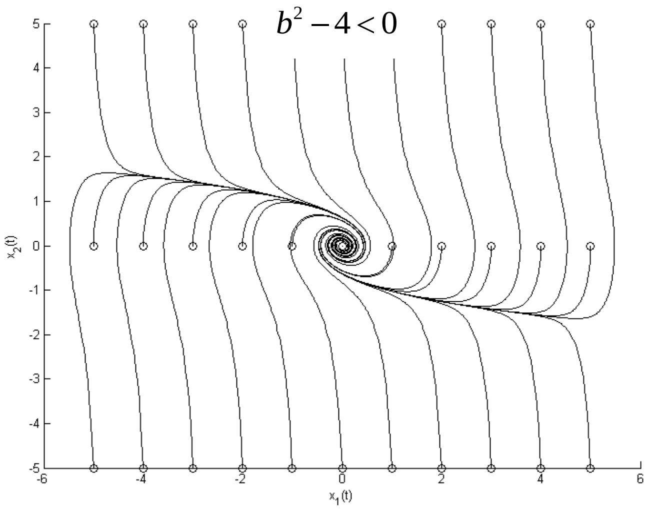
$$\left|\lambda I - A\right| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda + b \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda b + 1$$

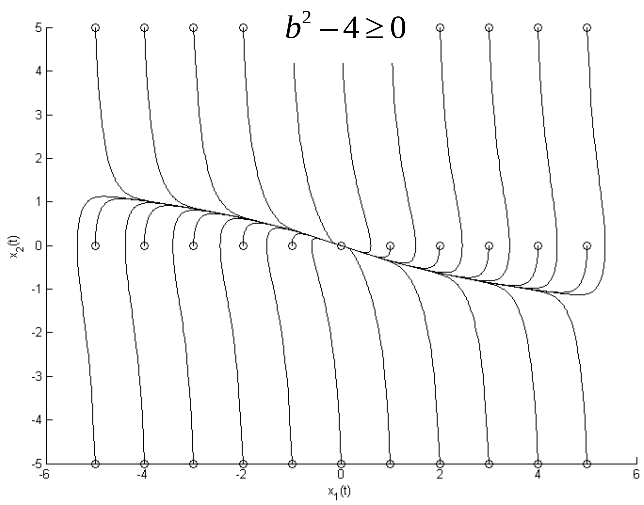
$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4}}{2}$$

Pro $b < 0$ leží vlastní čísla matice dynamiky v pravé komplexní polorovině a rovnovážný stav systému je nestabilní.

Pro $b > 0$ mohou nastat dvě situace. Pro $b^2 - 4 < 0$ jsou vlastní čísla komplexně sdružená se zápornou reálnou části. Rovnovážný stav systému je stabilní (typ ohnisko). V opačném případě jsou vlastní čísla reálná záporná a rovnovážný stav je taktéž stabilní (typ uzel).

Průběh trajektorií systému pro různé počáteční stavy:




2. Pomocí první Ljapunovovy metody vyšetřete stabilitu rovnovážných stavů nelineárního systému

$$\dot{x}_1(t) = x_1^2(t) + x_2^2(t) - 2$$
$$\dot{x}_2(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

Řešení:
Systém je zapsán ve tvaru vnitřního popisu a můžeme tedy přejít k výpočtu rovnovážných stavů.
Z podmínky $\dot{x}_2(t) = 0$ získáváme vztah $x_1(t) = x_2(t)$, který můžeme dosadit do rovnice pro $\dot{x}_1(t)$ a vypočítat tak rovnovážné stavy systému. Systém má dva rovnovážné stavy $x_{r1} = [1,1]$ a $x_{r2} = [-1,-1]$.
Proveďme linearizaci systému v okolí rovnovážných stavů.

Pro rovnovážný stav $x_{r1}$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x(t)=x_{r1}} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}_{x(t)=x_{r1}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vlastní čísla matice $A_1$

$$|\lambda I - A_1| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 4.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+14}}{2} \doteq \frac{1 \pm 3.9}{2}.$$

Jedno z vlastních čísel matice dynamiky $A_1$ leží v pravé komplexní polorovině a rovnovážný stav $x_{r1}$ je tedy nestabilní (typ sedlo).

Pro rovnovážný stav $x_{r2}$:

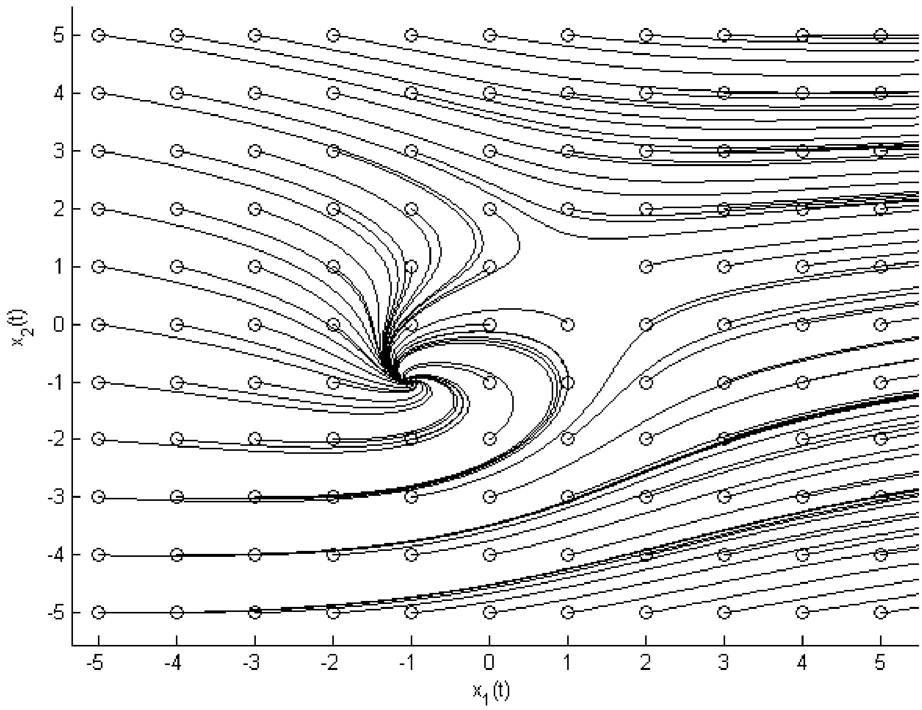
$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1,x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x(t)=x_{r2}} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}_{x(t)=x_{r2}} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Vlastní čísla matice $A_2$

$$|\lambda I - A_2| = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 2 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda + 1) + 2 = \lambda^2 + 3\lambda + 4$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \doteq \frac{-3 \pm j2.6}{2}.$$

Vlastní čísla matice dynamiky $A_2$ jsou komplexně sdružená a leží v levé komplexní polorovině. Rovnovážný stav $x_{r2}$ je tedy stabilní (typ ohnisko).

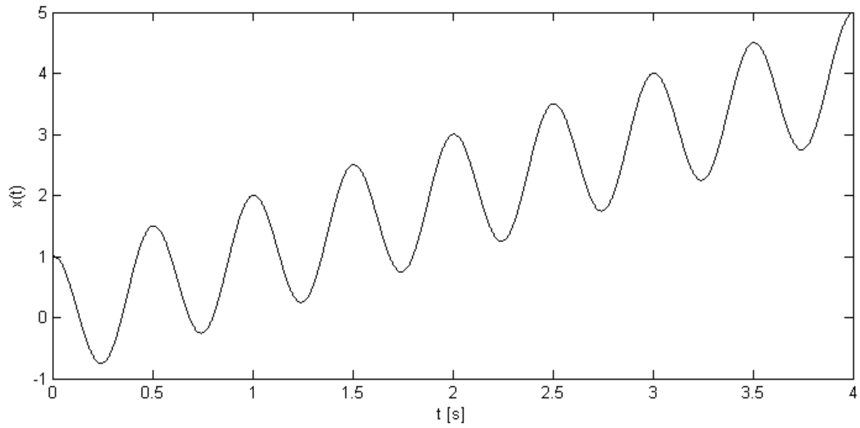

5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
$x_2(t)$
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
$x_1(t)$

## Zpracování signálů v časové oblasti

1. Pro zadané signály vypočtěte jejich střední hodnotu, energii, střední výkon a efektivní hodnotu.
   a) $x(t)=\cos(4\pi t)+t,\ \ t\in\langle 0,4\rangle$
   b) $x(t)=2\sin(2\pi t)-\cos(5\pi t),\ t\in\langle 0,2\rangle$

Řešení:

a) Časový průběh signálu




Střední hodnota:

$$\tilde{x}(t)=\frac{1}{t_b-t_a}\int_{t_a}^{t_b}x(t)dt=\frac{1}{4}\int_0^4\left[\cos(4\pi t)+t\right]dt=\frac{1}{4}\int_0^4\cos(4\pi t)dt+\frac{1}{4}\int_0^4 tdt=$$

$$=\frac{1}{16\pi}\left[\sin(4\pi t)\right]_0^4+\frac{1}{8}\left[t^2\right]_0^4=\frac{1}{16\pi}[0-0]+\frac{1}{8}[16-0]=2$$

Energie:

$$E=\int_{t_a}^{t_b}\left|x(t)\right|^2dt=\int_0^4\left[\cos(4\pi t)+t\right]^2dt=\int_0^4\cos^2(4\pi t)dt+2\int_0^4 t\cos(4\pi t)dt+\int_0^4 t^2dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^4\left[1+\sin(8\pi t)\right]dt+2\left[\frac{\cos(4\pi t)}{16\pi^2}+\frac{t\sin(4\pi t)}{4\pi}\right]_0^4+\frac{1}{3}\left[t^3\right]_0^4=$$

$$=\frac{1}{2}[t]_0^4+\frac{1}{16\pi}\left[-\cos(8\pi t)\right]_0^4+2\left[\frac{\cos(4\pi t)}{16\pi^2}+\frac{t\sin(4\pi t)}{4\pi}\right]_0^4+\frac{1}{3}\left[t^3\right]_0^4=$$

$$=2+\frac{1}{16\pi}[-1+1]+2\left[\frac{1}{16\pi^2}+0-\frac{1}{16\pi^2}-0\right]+\frac{1}{3}[64-0]=\frac{70}{3}\doteq 23{,}33$$

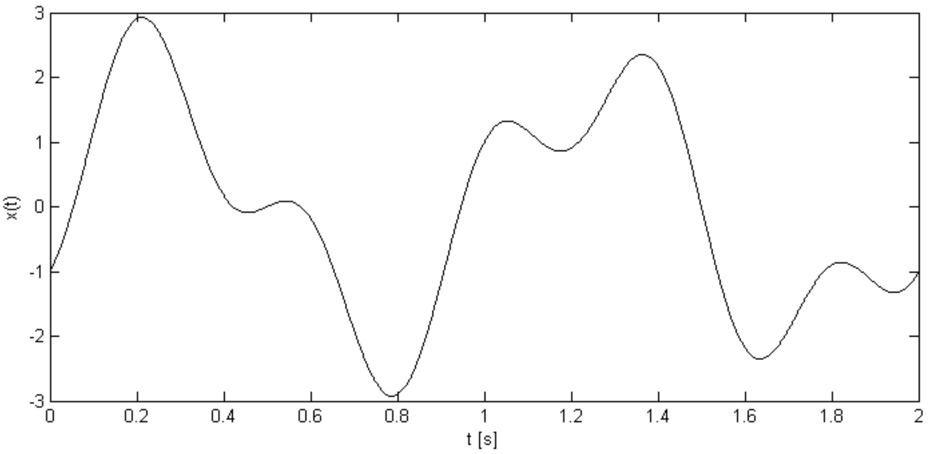
Střední výkon:

$$P=\frac{1}{t_b-t_a}\int_{t_a}^{t_b}\left|x(t)\right|^2dt=\frac{E}{t_b-t_a}=\frac{35}{6}\doteq 5{,}83$$

Efektivní hodnota:

$$x_{ef}=\sqrt{P}\doteq 2.42$$

b) Časový průběh signálu




Střední hodnota:

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{t_b - t_a}\int_{t_a}^{t_b} x(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^2 \left[2\sin(2\pi t) - \cos(5\pi t)\right]dt = \int_0^2 \sin(2\pi t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^2 \cos(5\pi t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-\cos(2\pi t)\right]_0^2 - \frac{1}{10\pi}\left[\sin(5\pi t)\right]_0^2 = \frac{1}{2\pi}[-1+1] - \frac{1}{10\pi}[0-0] = 0$$

Energie:

$$E = \int_0^2 \left[2\sin(2\pi t) - \cos(5\pi t)\right]^2 dt = 4\int_0^2 \sin^2(2\pi t)\,dt - 4\int_0^2 \sin(2\pi t)\cos(5\pi t)\,dt + \int_0^2 \cos^2(5\pi t)\,dt =$$

$$= 2\int_0^2 \left[1 - \cos(4\pi t)\right]dt - 2\int_0^2 \left[\sin(7\pi t) - \sin(3\pi t)\right]dt + \frac{1}{2}\int_0^2 \left[1 + \cos(4\pi t)\right]dt =$$

$$= 2[t]_0^2 - \frac{1}{2\pi}\left[\sin(4\pi t)\right]_0^2 + \frac{2}{7\pi}\left[\cos(7\pi t)\right]_0^2 - \frac{2}{3\pi}\left[\cos(3\pi t)\right]_0^2 + \frac{1}{2}[t]_0^2 + \frac{1}{8\pi}\left[\sin(4\pi t)\right]_0^2 =$$

$$= 4 - \frac{1}{2\pi}[0-0] + \frac{2}{7\pi}[1-1] - \frac{2}{3\pi}[1-1] + 1 + \frac{1}{8\pi}[0-0] = 5$$

Střední výkon:

$$P = \frac{1}{t_b - t_a}\int_{t_a}^{t_b} |x(t)|^2 dt = \frac{E}{t_b - t_a} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

Efektivní hodnota:

$$x_{ef} = \sqrt{P} \doteq 1{,}58$$

## Fourierovy řady

1. Nalezněte Fourieru řadu funkce

$$x(t) = t - \pi,\ t \in \langle 0, 2\pi )$$

Řešení:

Naším cílem je nalézt koeficienty Fourierovy řady. Zprvu zadanou funkci periodicky rozšiřme (s periodou $2\pi$). Nyní můžeme použít známé vzorce pro výpočet koeficientů Fourierovy řady:

$$T = 2\pi \rightarrow \omega = 2\pi / T = 1.$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(t-\pi)\,dt = \frac{1}{2\pi}\left[t^2\right]_0^{2\pi} - [t]_0^{2\pi} = 0,$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(k\omega t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[(t-\pi)\cos(kt)\right]dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\cos(kt)\,dt - \int_0^{2\pi}\cos(kt)\,dt =$$

$$= \frac{1}{k\pi}\left[\frac{\cos(kt)}{k} + t\sin(kt)\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{k}\left[\sin(kt)\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{k\pi}\left[\frac{1}{k} + 2\pi\cdot 0 - \frac{1}{k} - 0\right] - \frac{1}{k}[0-0] = 0$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(k\omega t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[(t-\pi)\sin(kt)\right]dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin(kt)\,dt - \int_0^{2\pi}\sin(kt)\,dt =$$

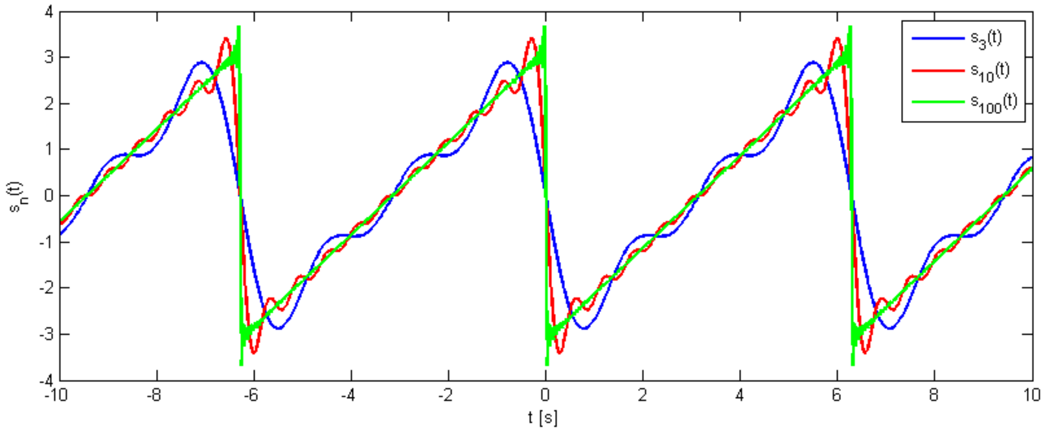
$$= \frac{1}{k\pi}\left[\frac{\sin(kt)}{k} - t\cos(kt)\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{k}\left[\cos(kt)\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{k\pi}[0 - 2\pi - 0 + 0] + \frac{1}{k}[1-1] = -\frac{2}{k}$$

Funkci x(t) tedy můžeme zapsat ve tvaru nekonečné řady:

$$s(t) = -2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kt)}{k}$$

Nebo ve tvaru částečného součtu:

$$s_n(t) = -2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kt)}{k}$$



2. Nalezněte Fourierovu řadu funkce

$$x(t)=\begin{cases} t, & t\in\langle 0,\pi) \\ 2\pi-t, & t\in\langle \pi,2\pi) \end{cases}$$

Řešení:

Zprvu zadanou funkci periodicky rozšiřme (s periodou $\pi$). Stejně jako u předchozího příkladu nalezneme koeficienty Fourierovy řady pomocí známých vzorců:

$T=2\pi \rightarrow \omega=2\pi/T=1.$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} tdt+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(2\pi-t)dt=\frac{1}{2\pi}\left[t^2\right]_0^{\pi}+2\left[t\right]_{\pi}^{2\pi}-\frac{1}{2\pi}\left[t^2\right]_{\pi}^{2\pi}=\frac{\pi}{2}+4\pi-2\pi-2\pi+\frac{\pi}{2}=\pi$$

$$a_k=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(k\omega t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(kt)dt+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(\pi-t)\cos(kt)dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(kt)}{k^2}+\frac{t\sin(kt)}{k}\right]_0^{\pi}+\frac{2}{k}\left[\sin(kt)\right]_{\pi}^{2\pi}-\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(kt)}{k^2}+\frac{t\sin(kt)}{k}\right]_{\pi}^{2\pi}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(k\pi)}{k^2}+\frac{\pi\sin(k\pi)}{k}-\frac{1}{k^2}\right]+\frac{2}{k}\left[\sin(2k\pi)-\sin(k\pi)\right]-\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(2k\pi)}{k^2}+\frac{2\pi\sin(2k\pi)}{k}-\frac{\cos(k\pi)}{k^2}+\frac{\pi\sin(k\pi)}{k}\right]=$$

$$=\frac{2}{k^2\pi^2}\left[\cos(k\pi)-1\right]=\frac{2}{k^2\pi^2}\left[(-1)^k-1\right]$$

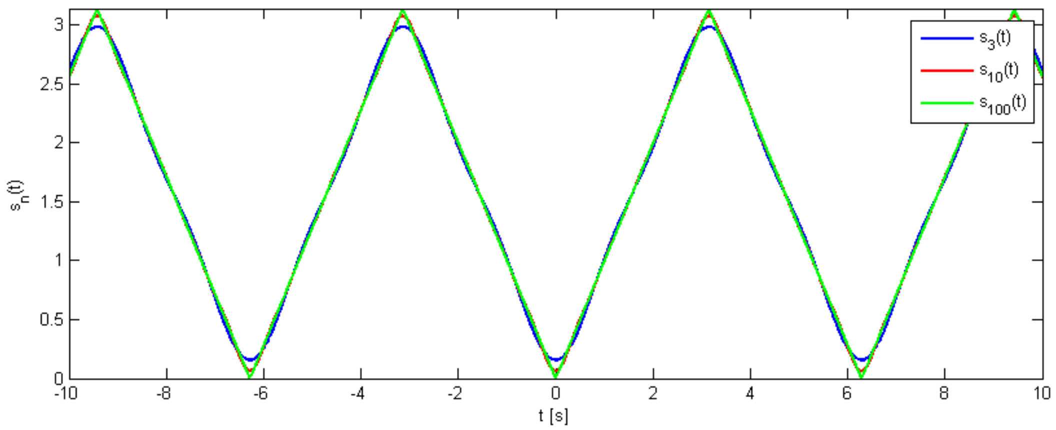
Funkce x(t) je sudá, a tedy koeficienty $b_k=0$.

Funkci x(t) nyní můžeme zapsat pomocí Fourierovy řady:

$$s(t)=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[(-1)^k-1\right]\cos(kt)$$

Nebo ve tvaru částečného součtu:

$$s_n(t)=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^k-1\right]\cos(kt)$$



## Spektra signálů

Analogový signál x(t) je pomocí měřicí karty s A/D převodníkem vzorkován s frekvencí fs. Určete, zda je vzorkovací frekvence vhodně zvolena. Pokud ne, navrhněte její vhodnou hodnotu. Nakreslete jednostranné amplitudové spektrum signálu.

a) $x(t) = 2\sin\left(50t\right), \quad f_s = 100Hz$

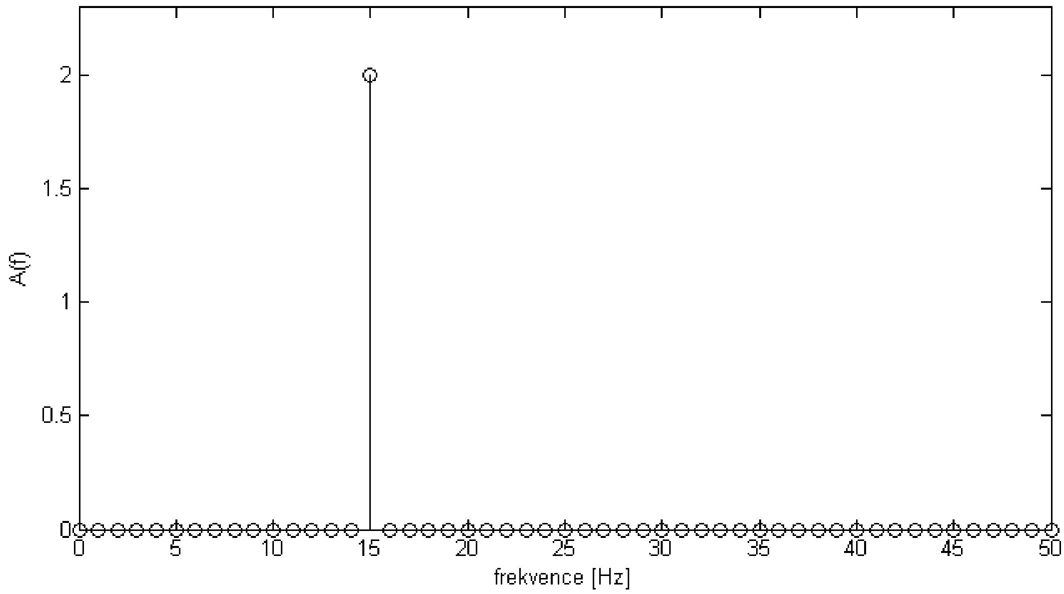
b) $x(t) = 2\sin\left(22t\right) + 4\sin(48t), \quad f_s = 40Hz$

c) $x(t) = 20\sin\left(86t\right) + 10\sin(40t), \quad f_s = 120Hz$

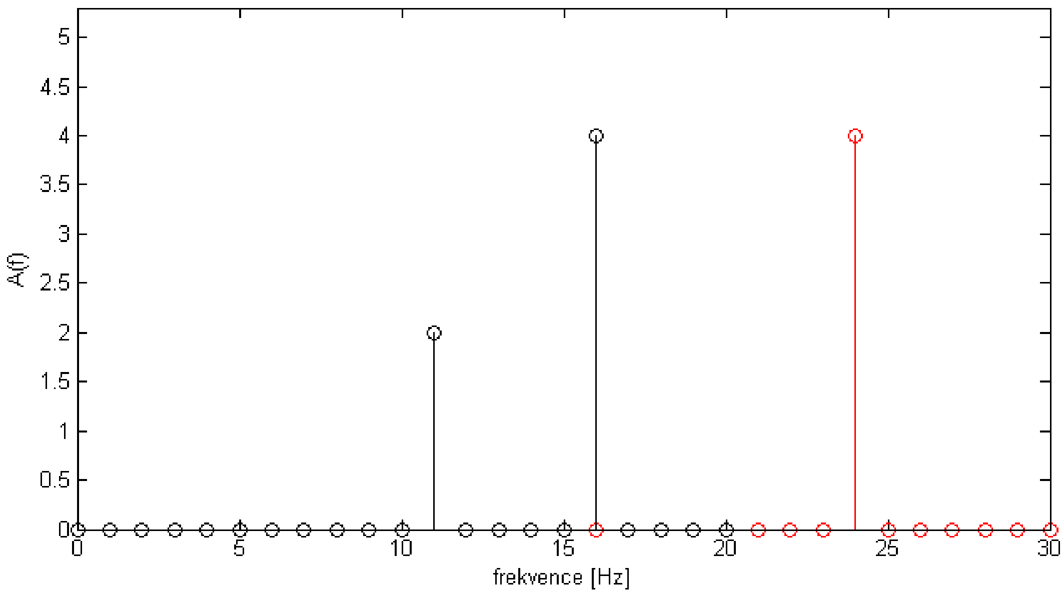
d) $x(t) = 4\sin\left(10t\right) + 3\sin(24t) + 5\sin\left(30t\right), \quad f_s = 50Hz$

Řešení:

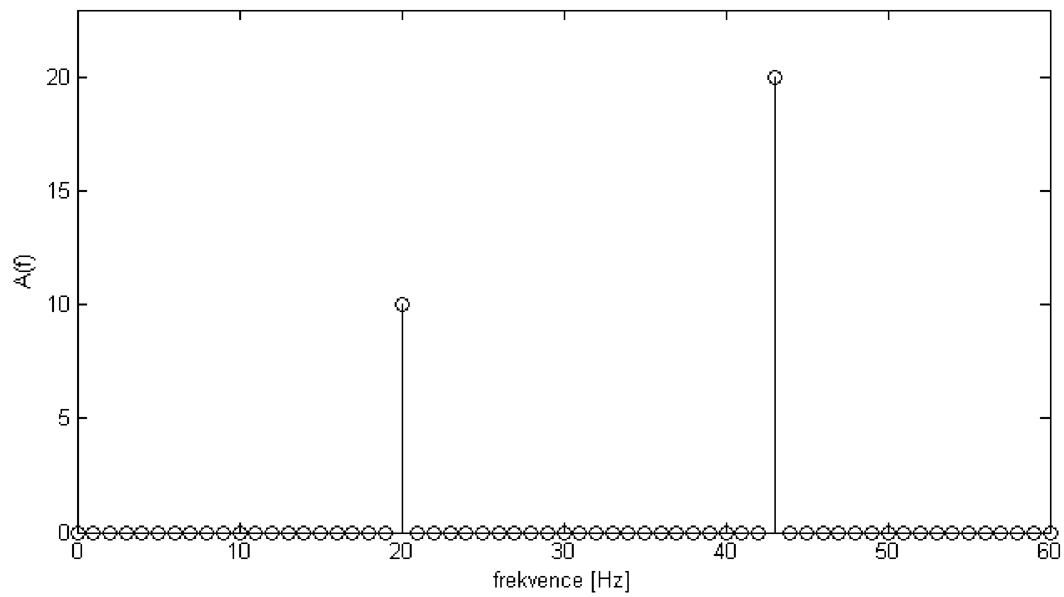
a) Signál se skládá pouze z jedné harmonické složky s frekvencí 25 Hz. Volba vzorkovací frekvence splňuje kritérium pro vzorkování spojitých signálů, $f_s / 2 > f_{\max}$.



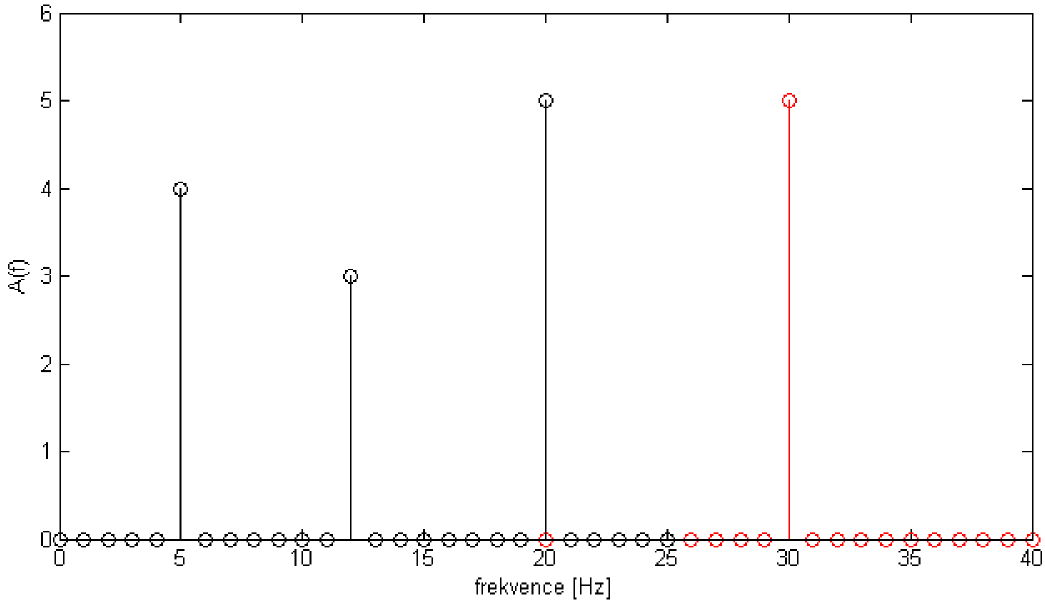

b) Signál se skládá ze dvou harmonických komponent. Amplituda první komponenty je 2 a frekvence 11 Hz, amplituda druhé komponenty je 4 a frekvence 24 Hz. Zvolená vzorkovací frekvence nesplňuje požadavky vzorkovacího teorému a nutně tedy dojde k aliasing efektu. Vhodná vzorkovací frekvence musí být větší než 24 Hz.




c) Signál se skládá ze dvou harmonických komponent. Amplituda první komponenty je 10 a její frekvence 20 Hz, amplituda druhé komponenty je 20 a její frekvence 43 Hz. Zvolená vzorkovací frekvence vyhovuje vzorkovacímu teorému a v tomto případě k aliasing efektu nedojde.




d) Signál se skládá ze tří harmonických komponent. Amplituda první komponenty je 4 a frekvence 5 Hz, amplituda druhé komponenty je 3 a frekvence 12 Hz a amplituda třetí komponenty je 5 a frekvence 30 Hz. Vzorkovací frekvence nesplňuje podmínky kladené a dojde tedy k aliasing efektu. Vhodná vzorkovací frekvence by měla být větší než 60 Hz.


A(f)
frekvence [Hz]
0
1
2
3
4
5
6
0
5
10
15
20
25
30
35
40

## Logické funkce

1. S využitím pravidel Booleovy algebry minimalizujte následující logické funkce
   a) $y_1 = u_1u_2 \vee u_1\bar{u}_2 \vee \bar{u}_1\bar{u}_2$,
   b) $y_2 = \bar{u}_1\bar{u}_2 \vee \bar{u}_1u_2 \vee u_1\bar{u}_2$,
   c) $y_3 = \bar{u}_1\bar{u}_2u_3 \vee u_1\bar{u}_2\bar{u}_3 \vee u_1\bar{u}_2u_3 \vee u_1u_2u_3$
   d) $y_4 = \bar{u}_1u_2u_3 \vee u_1\bar{u}_2\bar{u}_3 \vee u_1\bar{u}_2u_3 \vee u_1u_2\bar{u}_3 \vee u_1u_2u_3$
   e) $y_5 = \bar{u}_1\bar{u}_2u_3 \vee \bar{u}_1u_2\bar{u}_3 \vee \bar{u}_1u_2u_3 \vee u_1u_2\bar{u}_3 \vee u_1u_2u_3$
   f) $y_6 = \bar{u}_1\bar{u}_2\bar{u}_3\bar{u}_4 \vee \bar{u}_1\bar{u}_2\bar{u}_3u_4 \vee \bar{u}_1\bar{u}_2u_3u_4 \vee \bar{u}_1u_2\bar{u}_3\bar{u}_4 \vee \bar{u}_1u_2\bar{u}_3u_4 \vee \bar{u}_1u_2u_3u_4 \vee \bar{u}_1u_2u_3\bar{u}_4 \vee u_1\bar{u}_2\bar{u}_3u_4 \vee u_1\bar{u}_2u_3u_4$

   g) $y_7 = \bar{u}_1\bar{u}_2\bar{u}_3\bar{u}_4 \vee \bar{u}_1\bar{u}_2u_3\bar{u}_4 \vee \bar{u}_1\bar{u}_2u_3u_4 \vee \bar{u}_1u_2\bar{u}_3\bar{u}_4 \vee \bar{u}_1u_2u_3\bar{u}_4 \vee \bar{u}_1u_2u_3u_4 \vee u_1u_2\bar{u}_3\bar{u}_4 \vee u_1\bar{u}_2\bar{u}_3\bar{u}_4 \vee u_1u_2\bar{u}_3u_4 \vee u_1\bar{u}_2\bar{u}_3u_4$

Řešení:
Pro jednoduchost jsou voleny takové příklady, kdy pro minimalizaci logických funkcí stačí aplikovat (někdy i opakovaně) pouze základní pravidla Booleovy algebry.

a) $y_1 = u_1u_2 \vee u_1\bar{u}_2 \vee \bar{u}_1\bar{u}_2 = u_1(u_2 \vee \bar{u}_2) \vee \bar{u}_2(u_1 \vee \bar{u}_1) = u_1 \vee \bar{u}_2$

b) $y_2 = \bar{u}_1\bar{u}_2 \vee \bar{u}_1u_2 \vee u_1\bar{u}_2 = \bar{u}_1(u_2 \vee \bar{u}_2) \vee \bar{u}_2(u_1 \vee \bar{u}_1) = \bar{u}_1 \vee \bar{u}_2$

c) $y_3 = \bar{u}_1\bar{u}_2u_3 \vee u_1\bar{u}_2\bar{u}_3 \vee u_1\bar{u}_2u_3 \vee u_1u_2u_3 = u_1u_3(u_2 \vee \bar{u}_2) \vee u_1\bar{u}_2(u_3 \vee \bar{u}_3) \vee \bar{u}_2u_3(u_1 \vee \bar{u}_1) =$
$= u_1u_3 \vee u_1\bar{u}_2 \vee \bar{u}_2u_3$

d) $y_4 = \bar{u}_1u_2u_3 \vee u_1\bar{u}_2\bar{u}_3 \vee u_1\bar{u}_2u_3 \vee u_1u_2\bar{u}_3 \vee u_1u_2u_3 = u_1u_3(u_2 \vee \bar{u}_2) \vee u_2u_3(u_1 \vee \bar{u}_1) \vee u_1\bar{u}_3(u_2 \vee \bar{u}_2) =$
$= u_1(u_3 \vee \bar{u}_3) \vee u_2u_3 = u_1 \vee u_2u_3$

e) $y_5 = \bar{u}_1\bar{u}_2u_3 \vee \bar{u}_1u_2\bar{u}_3 \vee \bar{u}_1u_2u_3 \vee u_1u_2\bar{u}_3 \vee u_1u_2u_3 = \bar{u}_1u_3(u_2 \vee \bar{u}_2) \vee u_2\bar{u}_3(u_1 \vee \bar{u}_1) \vee u_2u_3(u_1 \vee \bar{u}_1) =$
$= \bar{u}_1u_3 \vee u_2(u_3 \vee \bar{u}_3) = \bar{u}_1u_3 \vee u_2$

f) $y_6 = \bar{u}_1\bar{u}_2\bar{u}_3\bar{u}_4 \vee \bar{u}_1\bar{u}_2\bar{u}_3u_4 \vee \bar{u}_1\bar{u}_2u_3u_4 \vee \bar{u}_1u_2\bar{u}_3\bar{u}_4 \vee \bar{u}_1u_2\bar{u}_3u_4 \vee \bar{u}_1u_2u_3u_4 \vee \bar{u}_1u_2u_3\bar{u}_4 \vee u_1\bar{u}_2\bar{u}_3u_4 \vee u_1\bar{u}_2u_3u_4 =$
$= \bar{u}_1u_2(\bar{u}_3\bar{u}_4 \vee u_3\bar{u}_4 \vee \bar{u}_3u_4 \vee u_3u_4) \vee \bar{u}_2u_4(\bar{u}_1\bar{u}_3 \vee u_1\bar{u}_3 \vee \bar{u}_1u_3 \vee u_1u_3) \vee \bar{u}_1\bar{u}_3(\bar{u}_2\bar{u}_4 \vee u_2\bar{u}_4 \vee \bar{u}_2u_4 \vee u_2u_4) =$

$= \bar{u}_1u_2(u_3(u_4 \vee \bar{u}_4) \vee \bar{u}_3(u_4 \vee \bar{u}_4)) \vee \bar{u}_2u_4(u_1(u_3 \vee \bar{u}_3) \vee \bar{u}_1(u_3 \vee \bar{u}_3)) \vee \bar{u}_1\bar{u}_3(u_2(u_4 \vee \bar{u}_4) \vee \bar{u}_2(u_4 \vee \bar{u}_4)) =$
$= \bar{u}_1u_2(u_3 \vee \bar{u}_3) \vee \bar{u}_2u_4(u_1 \vee \bar{u}_1) \vee \bar{u}_1\bar{u}_3(u_2 \vee \bar{u}_2) = \bar{u}_1u_2 \vee \bar{u}_2u_4 \vee \bar{u}_1\bar{u}_3$

g) $y_7 = \bar{u}_1\bar{u}_2\bar{u}_3\bar{u}_4 \vee \bar{u}_1\bar{u}_2u_3\bar{u}_4 \vee \bar{u}_1\bar{u}_2u_3u_4 \vee \bar{u}_1u_2\bar{u}_3\bar{u}_4 \vee \bar{u}_1u_2u_3\bar{u}_4 \vee \bar{u}_1u_2u_3u_4 \vee u_1u_2\bar{u}_3\bar{u}_4 \vee u_1\bar{u}_2\bar{u}_3\bar{u}_4 \vee u_1u_2\bar{u}_3u_4 \vee u_1\bar{u}_2\bar{u}_3u_4 =$
$= \bar{u}_1u_3(\bar{u}_2\bar{u}_4 \vee \bar{u}_2u_4 \vee u_2\bar{u}_4 \vee u_2u_4) \vee u_1\bar{u}_3(\bar{u}_2\bar{u}_4 \vee \bar{u}_2u_4 \vee u_2\bar{u}_4 \vee u_2u_4) \vee \bar{u}_3\bar{u}_4(u_1u_2 \vee \bar{u}_1u_2 \vee \bar{u}_1\bar{u}_2 \vee u_1\bar{u}_2) =$
$= \bar{u}_1u_3(\bar{u}_2(\bar{u}_4 \vee u_4) \vee u_2(\bar{u}_4 \vee u_4)) \vee u_1\bar{u}_3(\bar{u}_2(\bar{u}_4 \vee u_4) \vee u_2(\bar{u}_4 \vee u_4)) \vee \bar{u}_3\bar{u}_4(\bar{u}_1(\bar{u}_2 \vee u_2) \vee u_1(\bar{u}_2 \vee u_2)) =$
$= \bar{u}_1u_3(\bar{u}_2 \vee u_2) \vee u_1\bar{u}_3(\bar{u}_2 \vee u_2) \vee \bar{u}_3\bar{u}_4(\bar{u}_1 \vee u_1) = \bar{u}_1u_3 \vee u_1\bar{u}_3 \vee \bar{u}_3\bar{u}_4$

2. Logické funkce z předchozího příkladu zapište do pravdivostní tabulky a proveďte minimalizaci pomocí Karnaughovy mapy.

Řešení:

a) Logickou funkci zapíšeme do pravdivostní tabulky.

| i | $u_1$ | $u_2$ | $y_1$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 1 |

Na základě této pravdivostní tabulky sestavíme Karnaughovu mapu a provedeme minimalizaci logické funkce:

| | | $u_1$ |
|---|---|---|
| | 1 | 1 |
| $u_2$ | 0 | 1 |

$$y_1 = u_1 \vee \bar{u}_2$$

b) Logickou funkci zapíšeme do pravdivostní tabulky

| i | $u_1$ | $u_2$ | $y_2$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 0 |

Na základě této pravdivostní tabulky sestavíme Karnaughovu mapu a provedeme minimalizaci logické funkce:

| | | $u_1$ |
|---|---|---|
| | 1 | 1 |
| $u_2$ | 1 | 1 |

$$y_2 = \bar{u}_1 \vee \bar{u}_2$$

c) Logickou funkci zapíšeme do pravdivostní tabulky:

| i | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $y_3$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Na základě této pravdivostní tabulky sestavíme Karnaughovu mapu a provedeme minimalizaci logické funkce:

| | | $u_2$ | | $u_1$ |
|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $u_3$ | 1 | 0 | 1 | 1 |

$$y_3 = u_1\bar{u}_2 \vee \bar{u}_2 u_3 \vee u_1 u_3$$

d) Logickou funkci zapíšer

| i | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $y_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Na základě této pravdivostní tabulky sestavíme Karnaughovu mapu a provedeme minimalizaci logické funkce:

| | | $u_2$ | | $u_1$ |
|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $u_3$ | 0 | 1 | 1 | 1 |

$$y_4 = u_1 \vee u_2 u_3$$

e) Logickou funkci zapíšeme do pravdivostní tabulky:

| i | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $y_5$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Sestavíme Karnaughovu mapu:

| | | $u_2$ | $u_2$, $u_1$ | $u_1$ |
|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $u_3$ | 1 | 1 | 1 | 0 |

$$y_5 = u_2 \vee \bar{u}_1 u_3$$

f) Logickou funkci zapíšeme do pravdivostní tabulky:

| i | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | $y_6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 11 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 12 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 13 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Sestavíme Karnaughovu mapu:

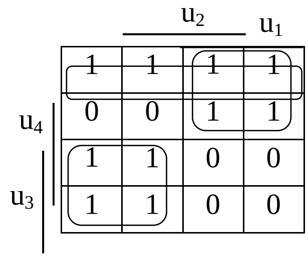
| | | $u_2$ | $u_2$, $u_1$ | $u_1$ |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $u_4$ | 1 | 1 | 0 | 1 |
| $u_4$, $u_3$ | 1 | 1 | 0 | 1 |
| $u_3$ | 0 | 1 | 0 | 0 |

$$y_6 = \bar{u}_1\bar{u}_3 \vee \bar{u}_1 u_2 \vee \bar{u}_2 u_4$$

g) Logickou funkci zapíšeme do pravdivostní tabulky:

| i | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | $y_7$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 9 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 11 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 12 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 13 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

Sestavíme Karnaughovu mapu:

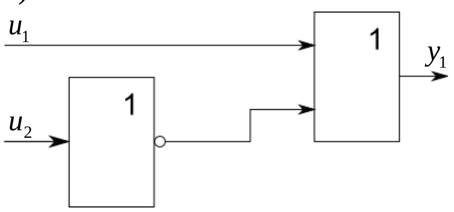



$$y_7 = u_1\bar{u}_3 \vee \bar{u}_1 u_3 \vee \bar{u}_3\bar{u}_4$$

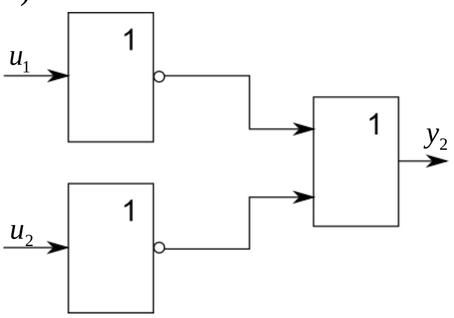
3. Pro minimalizované logické funkce nakreslete odpovídající FBD

Řešení:

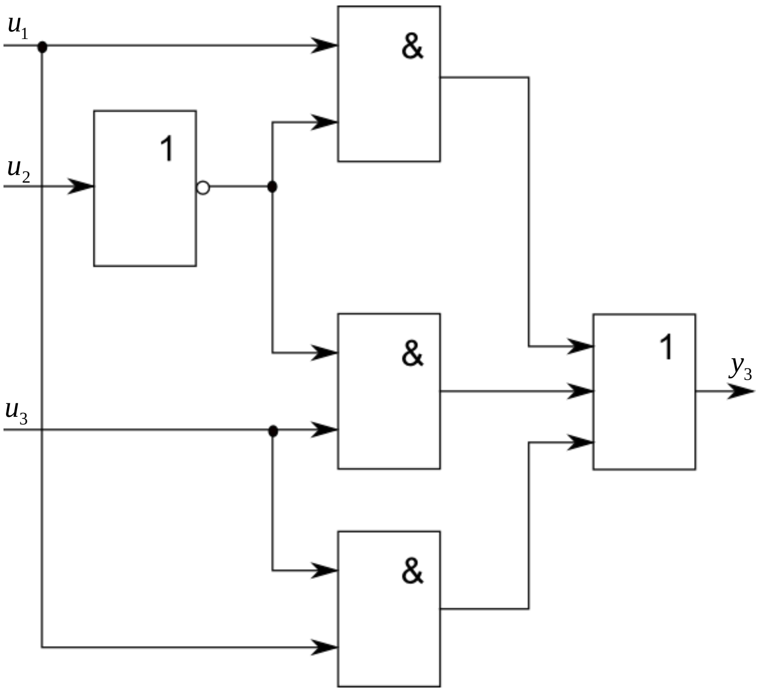
a)



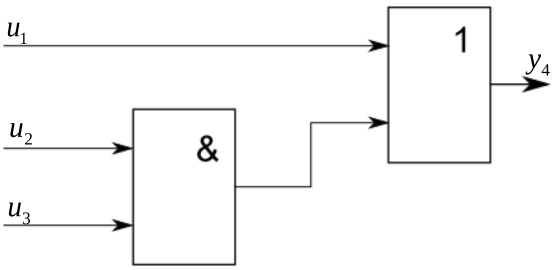

b)



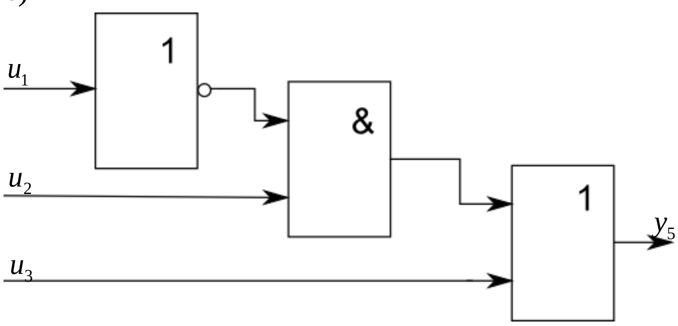
c)



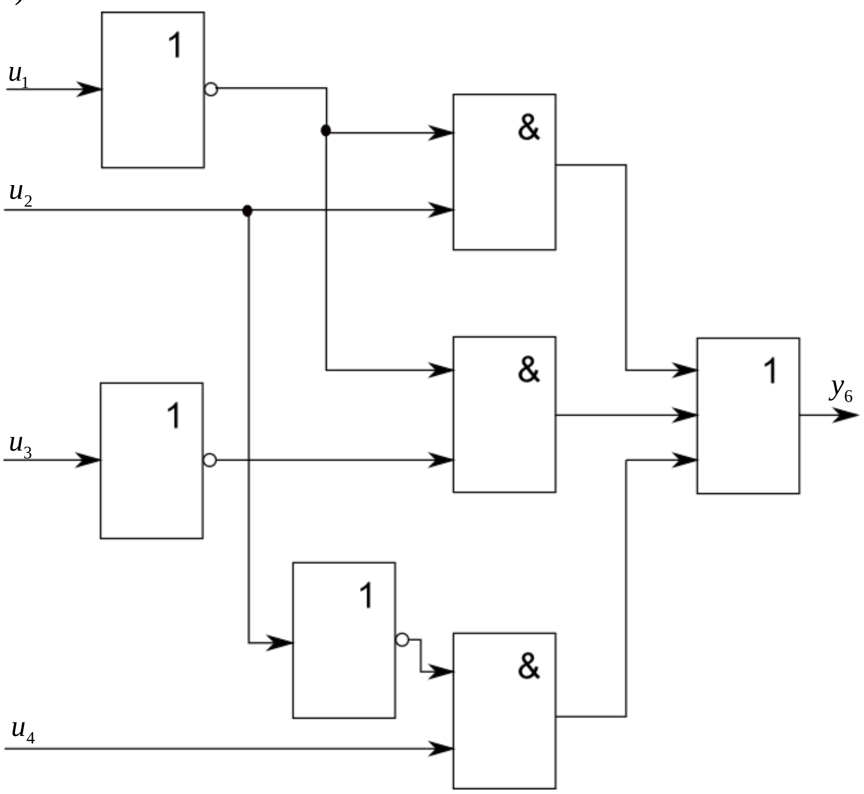

d)



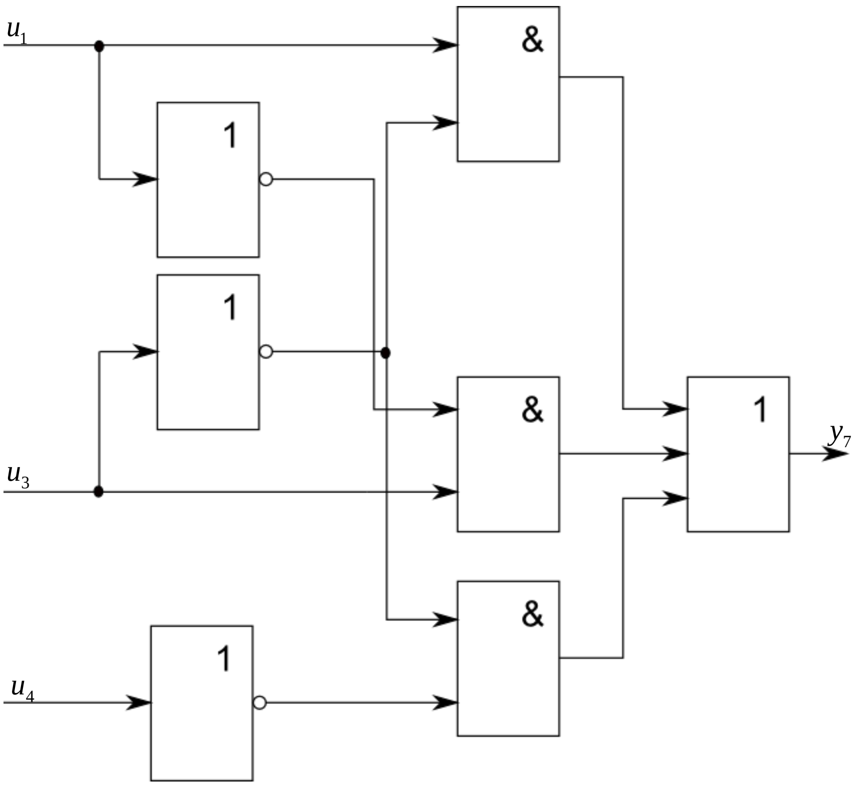

e)



f)

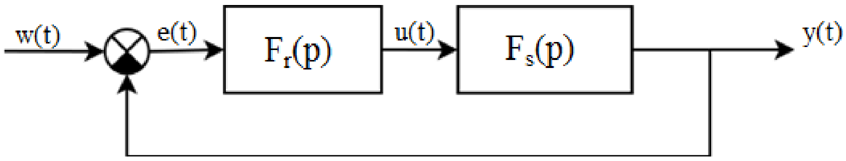



g)



**Přenosové funkce v regulačním obvodu**

Uvažujte regulační smyčku




1. Určete ustálenou hodnotu regulované veličiny pro následující systémy

   a) $F_s(p) = \dfrac{1}{p^2 + 3p + 2}$, $F_r(p) = 12$

   b) $F_s(p) = \dfrac{1}{p^3 + p^2 + 3p + 2}$, $F_r(p) = \dfrac{1}{p}$

   c) $F_s(p) = \dfrac{1}{p^2 + p + 1}$, $F_r(p) = \dfrac{p+1}{0.1p + 1}$

Požadované hodnota je w(t) = 1 (W(p)=1/p).

Řešení:
Ustálenou hodnotu regulované veličiny vypočteme na základě vlastností Laplaceovy transformace, konkrétně věty o koncové hodnotě. Pro využití této věty je potřeba určit Laplaceův obraz regulované veličiny. Při výpočtech budeme používat následující značení čitatele a jmenovatele řízeného systému, resp. regulátoru

$$F_s(p) = \frac{b(p)}{a(p)}, \quad F_r = \frac{d(p)}{c(p)}.$$

a) Podle věty o koncové hodnotě pro ustálenou hodnotu regulované veličiny platí

$$y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{p\to 0} pY(p) = \lim_{p\to 0} pW(p)F_u(p)$$

Přenos uzavřené regulační smyčky vypočteme podle vztahu

$$F_u(p) = \frac{F_o(p)}{1 + F_o(p)} = \frac{F_s(p)F_r(p)}{1 + F_s(p)F_r(p)} = \frac{\dfrac{b(p)d(p)}{a(p)c(p)}}{1 + \dfrac{b(p)d(p)}{a(p)c(p)}} = \frac{b(p)d(p)}{a(p)c(p) + b(p)d(p)} = \frac{12}{p^2 + 3p + 14}$$

Dosadíme do věty o koncové hodnotě

$$y(\infty) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{p\to 0} pY(p) = \lim_{p\to 0} pW(p)F_u(p) = \lim_{p\to 0} p\frac{1}{p}\frac{12}{p^2 + 3p + 14} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}.$$

b) Použijeme stejný postup jako u předchozího příkladu. Napřed vypočteme přenos uzavřené regulační smyčky.

$$F_u(p)=\frac{F_o(p)}{1+F_o(p)}=\frac{b(p)d(p)}{a(p)c(p)+b(p)d(p)}=\frac{1}{p^4+p^3+3p^2+2p+1}$$

Podle věty o koncové hodnotě platí

$$y(\infty)=\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{p\to 0}pY(p)=\lim_{p\to 0}pW(p)F_u(p)=\lim_{p\to 0}p\frac{1}{p}\frac{1}{p^4+p^3+3p^2+2p+1}=1$$

c) Použijeme opět stejný postup. Přenos uzavřené regulační smyčky

$$F_u(p)=\frac{F_o(p)}{1+F_o(p)}=\frac{b(p)d(p)}{a(p)c(p)+b(p)d(p)}=\frac{p+1}{(p^2+p+1)(0.1p+1)+p+1}=\frac{p+1}{0.1p^3+1.1p^2+2.1p+2}$$

Dosadíme do vztahu pro ustálenou hodnotu regulované veličiny

$$y(\infty)=\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{p\to 0}pY(p)=\lim_{p\to 0}pW(p)F_u(p)=\lim_{p\to 0}p\frac{1}{p}\frac{p+1}{0.1p^3+1.1p^2+2.1p+2}=\frac{1}{2}$$

2. Určete ustálenou hodnotu regulační odchylky pro následující systémy

a) $F_s(p)=\frac{1}{p^2+3p+4},\ F_r(p)=2$

b) $F_s(p)=\frac{1}{p^3+2p^2+4p+5},\ F_r(p)=\frac{2}{p}$

c) $F_s(p)=\frac{1}{p^2+2p+1},\ F_r(p)=\frac{2p+8}{p+2}$

Požadované hodnota je w(t) = 1 (W(p)=1/p).

Řešení:

Ustálenou hodnotu regulační odchylky vypočteme na základě věty o koncové hodnotě. Pro aplikaci této věty musíme určit Laplaceův obraz regulační odchylky.

a) Podle věty o koncové hodnotě platí:

$$e(\infty)=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{p\to 0}pE(p)=\lim_{p\to 0}pW(p)F_{e,w}(p)$$

Přenos z požadované veličiny na regulační odchylku vypočteme podle vztahu

$$F_{e,w}(p)=\frac{1}{1+F_o(p)}=\frac{1}{1+F_s(p)F_r(p)}=\frac{1}{1+\frac{b(p)d(p)}{a(p)c(p)}}=\frac{a(p)c(p)}{a(p)c(p)+b(p)d(p)}=\frac{p^2+3p+4}{p^2+3p+6}$$

Dosadíme do vztahu pro koncovou hodnotu regulační odchylky

$$e(\infty)=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{p\to 0}pE(p)=\lim_{p\to 0}pW(p)F_{e,w}(p)=\lim_{p\to 0}p\frac{1}{p}\frac{p^2+3p+4}{p^2+3p+6}=\frac{4}{6}.$$

b) Použijeme stejný postup jako v předchozím příkladu.

Vypočteme přenos $F_{e,w}(p)$

$$F_{e,w}(p)=\frac{1}{1+F_o(p)}=\frac{1}{1+F_s(p)F_r(p)}=\frac{a(p)c(p)}{a(p)c(p)+b(p)d(p)}=\frac{p^4+2p^3+4p^2+5p}{p^4+2p^3+4p^2+5p+2}$$

Dosadíme do vztahu pro koncovou hodnotu regulační odchylky

$$e(\infty)=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{p\to 0}pE(p)=\lim_{p\to 0}pW(p)F_{e,w}(p)=\lim_{p\to 0}p\frac{1}{p}\frac{p^4+2p^3+4p^2+5p}{p^4+2p^3+4p^2+5p+2}=0$$

c) Vypočteme přenos $F_{e,w}(p)$

$$F_{e,w}(p)=\frac{1}{1+F_o(p)}=\frac{a(p)c(p)}{a(p)c(p)+b(p)d(p)}=\frac{\left(p^2+2p+1\right)(p+2)}{\left(p^2+2p+1\right)(p+2)+2p+2}=\frac{p^3+4p^2+5p+2}{p^3+4p^2+7p+10}$$

Dosadíme do vztahu pro koncovou hodnotu regulační odchylky

$$e(\infty)=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{p\to 0}pE(p)=\lim_{p\to 0}pW(p)F_{e,w}(p)=\lim_{p\to 0}p\frac{1}{p}\frac{p^3+4p^2+5p+2}{p^3+4p^2+7p+10}=\frac{1}{5}$$