INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Aplikace kybernetiky ve strojírenství

6. přednáška

Doc. Ing. Eduard Janeček, CSc.

Ing. Jan Jakl

Podpořeno v rámci projektu CZ.1.07/2.2.00/15.0383
Inovace studijního oboru Dopravní a manipulační technika
s ohledem na potřeby trhu práce

Stabilita dynamických systémů

S pojmem stabilita se již setkal každý z nás a každý z nás si dokáže představit co musí systém splňovat abychom mohli prohlásit, že je stabilní. Stabilita dynamického systému je taková vlastnost, která poukazuje na to, že pokud se systém nachází v nějakém „klidovém“ stavu a my jej z tohoto stavu vychýlíme vnějším působením, tak se systém dokáže do tohoto stavu opět vrátit, nebo zůstane v jeho blízkém okolí. Při vyšetřování stability vycházíme z předpokladu, že systém je autonomní ($u(t)\equiv 0$) a vychýlení z klidového stavu nahrazujeme změnou počátečním podmínek ($x(t_0)$).

$$\dot{x} = f\left(x(t)\right)$$

Rovnovážný stav systému

Rovnovážný stav je definován jako stav neřízeného (autonomního systému, $u(t)\equiv 0$), ve kterém je systém v klidu, tj. časové derivace vektoru stavu jsou rovny nule.

$$f\left(x_r(t)\right) = 0$$

Pokud je systém lineární pak je rovnovážný stav dán řešením homogenní soustavy rovnic

$$0 = Ax_r(t)$$

Pokud je matice dynamiky A regulární (její determinant je různý od nuly), pak existuje jediné řešení $x_r = 0$ (tzv. triviální řešení). Pokud je matice A singulární, pak existuje nekonečně mnoho řešení (např. systém s astatismem).
Rovnovážným stavem systému procházejí všechny trajektorie systému. Ostatními body ve stavovém prostoru prochází vždy právě jedna trajektorie.

Stabilita dynamického systému závisí na tom, zda se se body po trajektorii systému pohybují **do** nebo **od** rovnovážného stavu. Vyšetřování stability dynamických systémů tak přechází na vyšetřování **stability rovnovážných stavů**. V případě lineárních systémů nezávisí stabilita rovnovážného stavu na počátečních podmínkách. Lineární systém je stabilní, jestliže jsou stabilní všechny jeho rovnovážné stavy. V případě nelineárních systémů rozlišujeme stabilitu:

- Lokální (stabilita v malém) – systém je stabilní pro malé výchylky od rovnovážného stavu.
- Globální (stabilita ve velkém) – systém je stabilní pro všechny počáteční podmínky.

Na rozdíl od lineárních systémů je stabilita u nelineárních systémů pouze lokální vlastností.
V této přednášce se budeme zprvu věnovat vyšetřování stability lineárních systémů. Nelineárním systémům se budeme věnovat na závěr.

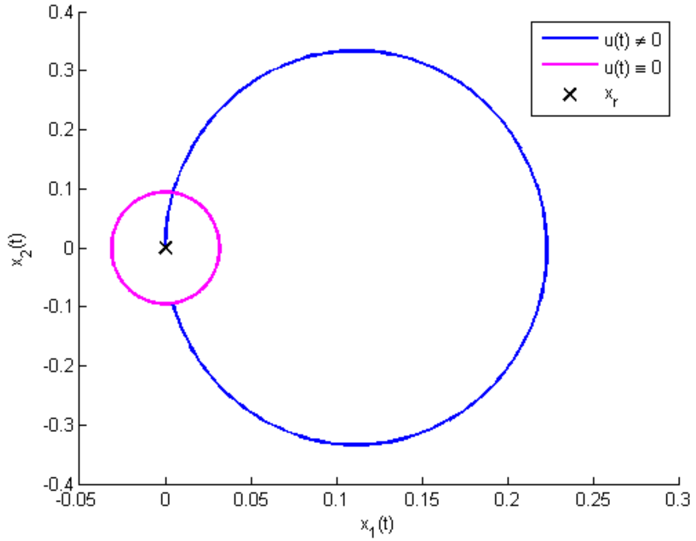
Typy rovnovážných stavů

Typ rovnovážného stavu závisí na vlastních číslech matice dynamiky A $\left\{\lambda_i\left(A\right)\right\}_{i=1}^{n}$.

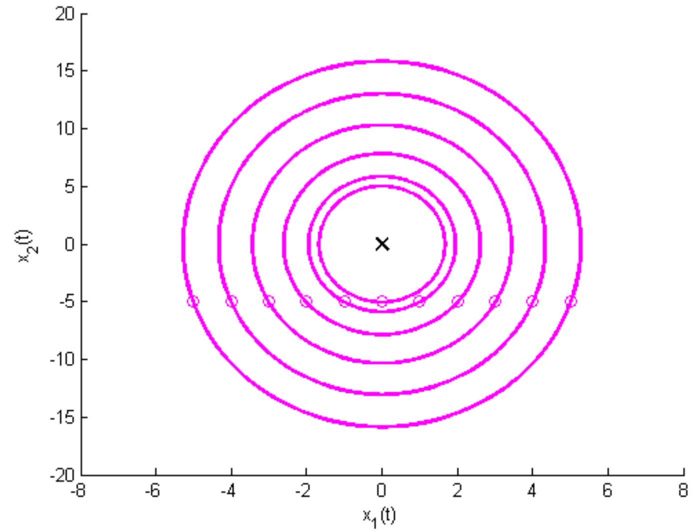
Střed

- $\lambda_{1,2}\left(A\right) = \pm j\omega$, ryze imaginární, $\mathrm{Re}\left\{\lambda_{1,2}\right\} = 0$, průběh složek vektoru stavu je kmitavý netlumený

vychýlení z x_r buzením



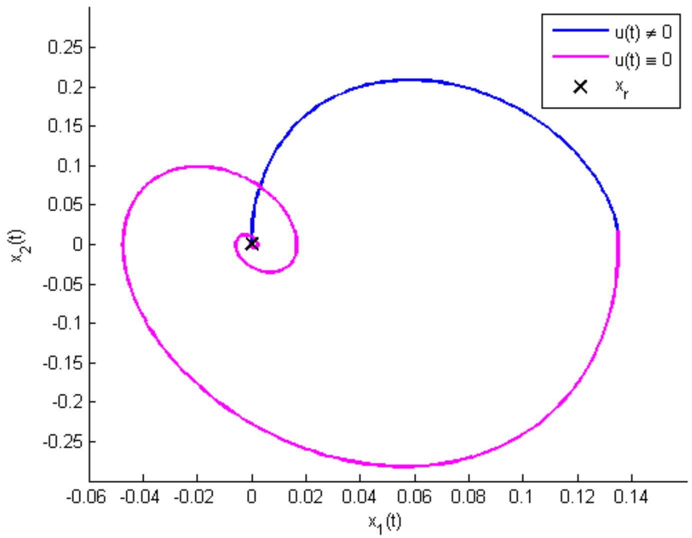
stavová trajektorie pro různá $x(t_0)$



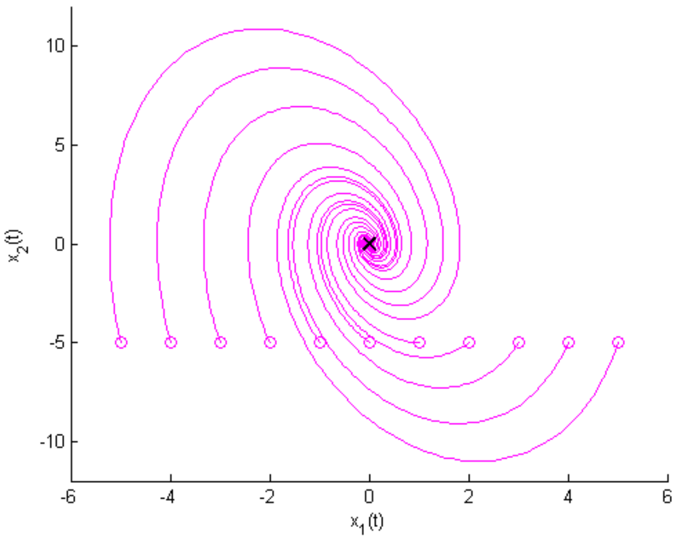
Ohnisko

- $\lambda_{1,2}(A) = \sigma \pm j\omega$, komplexně sdružená, leží v levé komplexní polorovině, $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ průběh složek stavu je kmitavý, tlumený. Stabilní!

vychýlení z x_r buzením



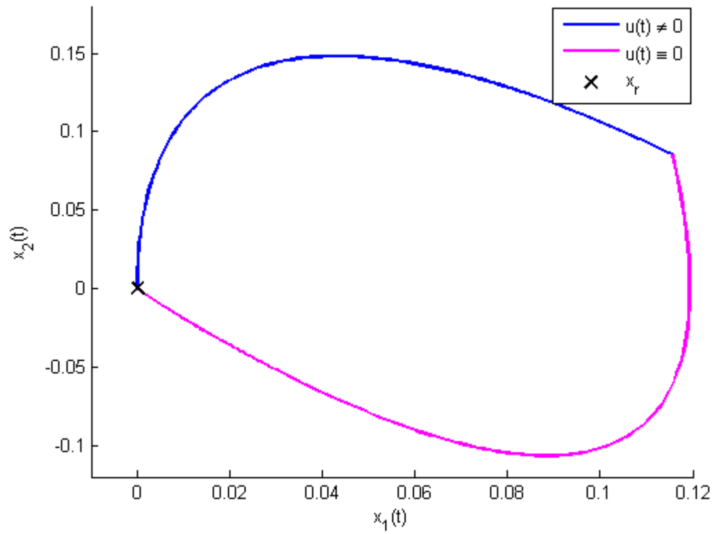
stavová trajektorie pro různá $x(t_0)$



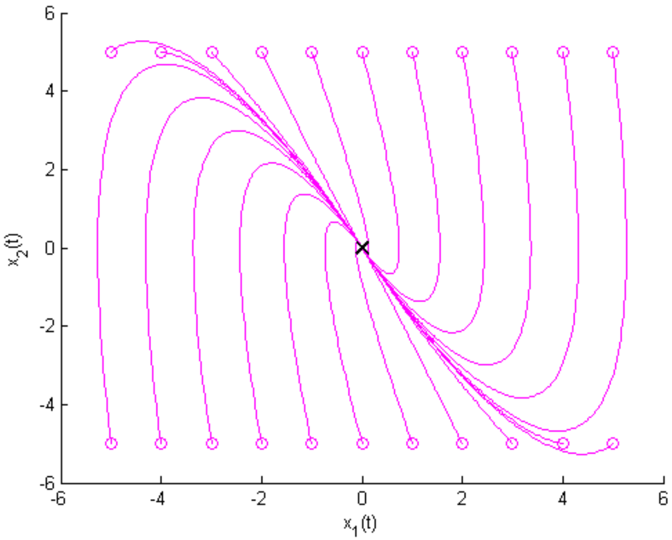
Uzel

- $\lambda_{1,2}(A) = \sigma_1, \sigma_2$, reálná, záporná, $\sigma_{1,2} < 0$, průběh složek stavu je nekmitavý. Stabilní!

vychýlení z x_r buzením



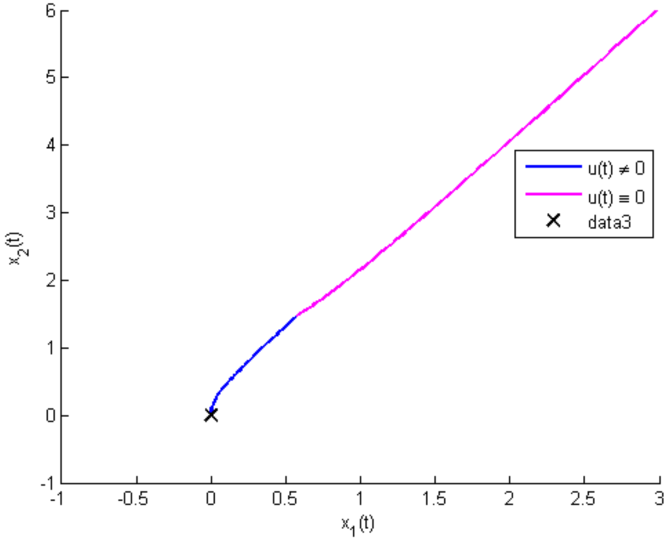
stavová trajektorie pro různá $x(t_0)$



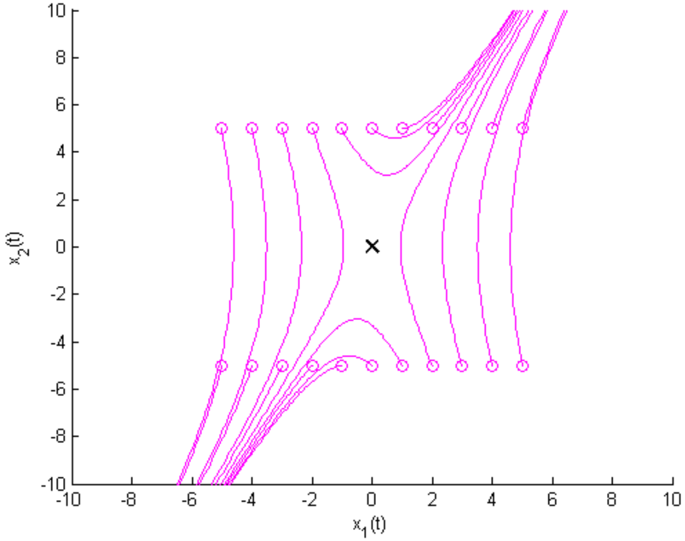
Sedlo

- $\lambda_{1,2}(A)=\sigma_1,\sigma_2$, reálná, různá znaménka, $\sigma_1\sigma_2<0$. Nestabilní! Nemá rovnovážný stav.

vychýlení z x_r buzením



stavová trajektorie pro různá $x(t_0)$



Existuje několik definic stability. Uveďme některé z nich:

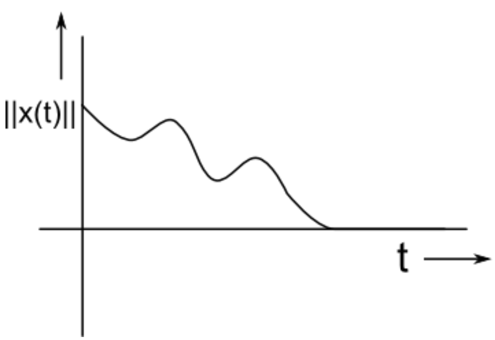
Vnitřní stabilita – stabilita rovnovážného stavu

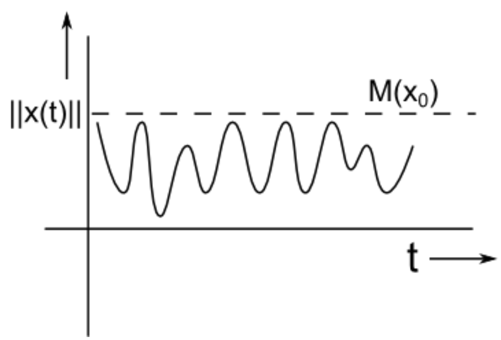
Rovnovážný stav $x_r = 0$ autonomního spojitého LDS

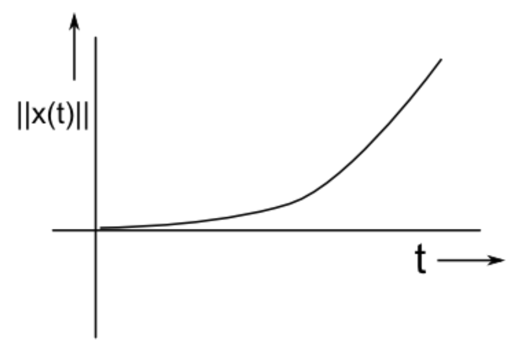
$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

s počátečním stavem $x(t_0) = x_0$ je

- asymptoticky stabilní pokud $\forall x_0$ platí, že $\lim\limits_{t\to\infty} \left\| x(t) \right\| = 0$
- stabilní pokud $\forall x_0$ platí, že $\exists M(x_0) : \left\| x(t) \right\| < M(x_0), \forall t, t \in \langle t_0, \infty)$
- nestabilní pokud $\exists x_0$ takové, že $\lim\limits_{t\to\infty} \left\| x(t) \right\| = \infty$







Vnější stabilita – vstupně výstupní stabilita

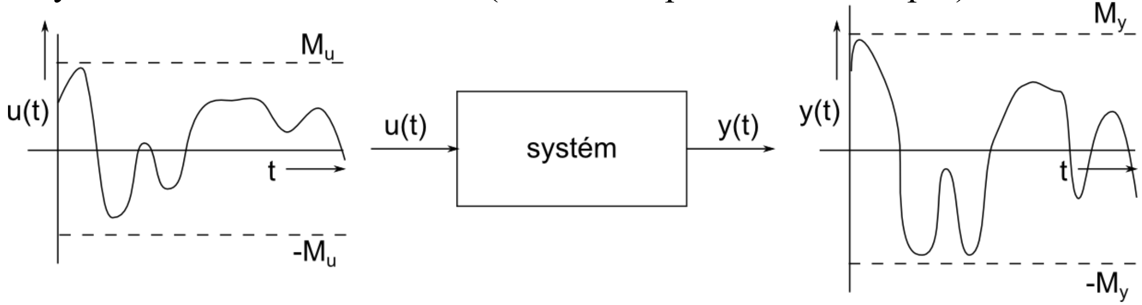
Spojitý lineární dynamický systém

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$
$$y(t) = c^T x(t)$$

je vstupně-výstupně stabilní, jestliže na omezený vstup reaguje omezeným výstupem.

$$\forall u(t): |u(t)| < M_u, \exists M_y : |y(t)| < M_y$$

Tomuto typu stability se také říká BIBO stabilita (bounded input bounded output).



Z podmínky omezeného výstupu systému plyne, že systém je BIBO stabilní právě tehdy když

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| < \infty$$

kde g(t) je impulsní funkce daného systému.

Podmínka stability LDS

Jednoduchou úvahou nyní dojdeme k nutným podmínkám stability LDS. Jestliže na vstup systému působí jednotkový skok, pak je přirozeným požadavkem, aby se výstup systému v konečném čase ustálil na konstantní hodnotě (přirozená složka odezvy odezní a zbude pouze vynucená složka). Mezi přechodovou a impulsní funkcí platí vztah

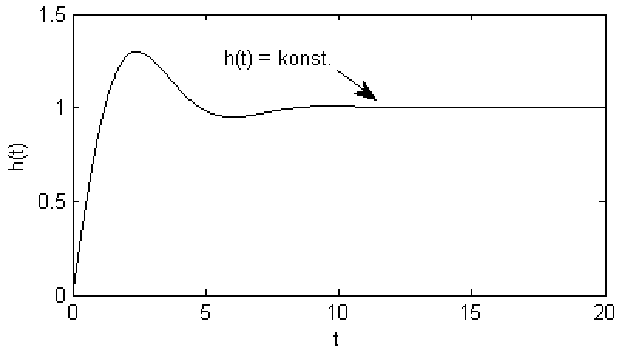
$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}$$

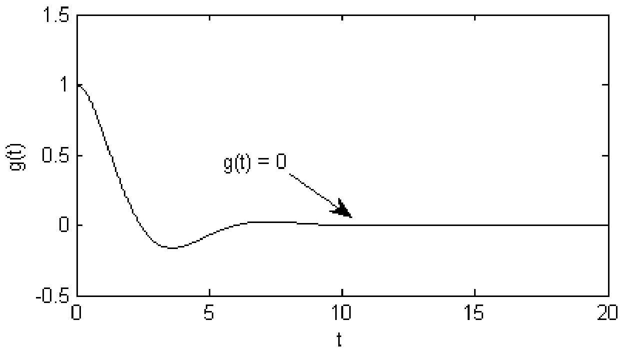
Pokud má být přechodová funkce od určitého času konstantní, musí být impulsní funkce systému od tohoto času nulová

$$h(t) = konst.,\ t \in \langle t_u, \infty) \quad \Rightarrow \quad g(t) = 0,\ t \in \langle t_u, \infty)$$

V případě, že je dynamika systému byla „pomalá“ (póly systému jsou blízko imaginární osy, trvalo by dlouho než by odezněla přirozená složka odezvy), můžeme stanovit požadavek

$$\lim_{t \to \infty} g(t) = 0$$





Pro impulsní funkci systému n-tého řádu, který má n_1 reálných pólů a n_2 párů komplexně sdružených pólů platí vztah (porovnejte s obecným řešením LDR ve 2. přednášce)

$$g(t) = \sum_{k=1}^{n_1} r_k e^{p_k t} + \sum_{l=1}^{n_2} r_l e^{\mathrm{Re}(p_l)t} \sin\left(\mathrm{Im}(p_l)t + \varphi\right)$$

Aby se průběh impulsní funkce limitně blížil k 0, musí všechny exponenciální funkce v předchozím vztahu také klesat k 0. Exponenciální funkce e^{at} je klesající, jestliže je a<0. Póly stabilního LDS tedy musí vyhovovat podmínce

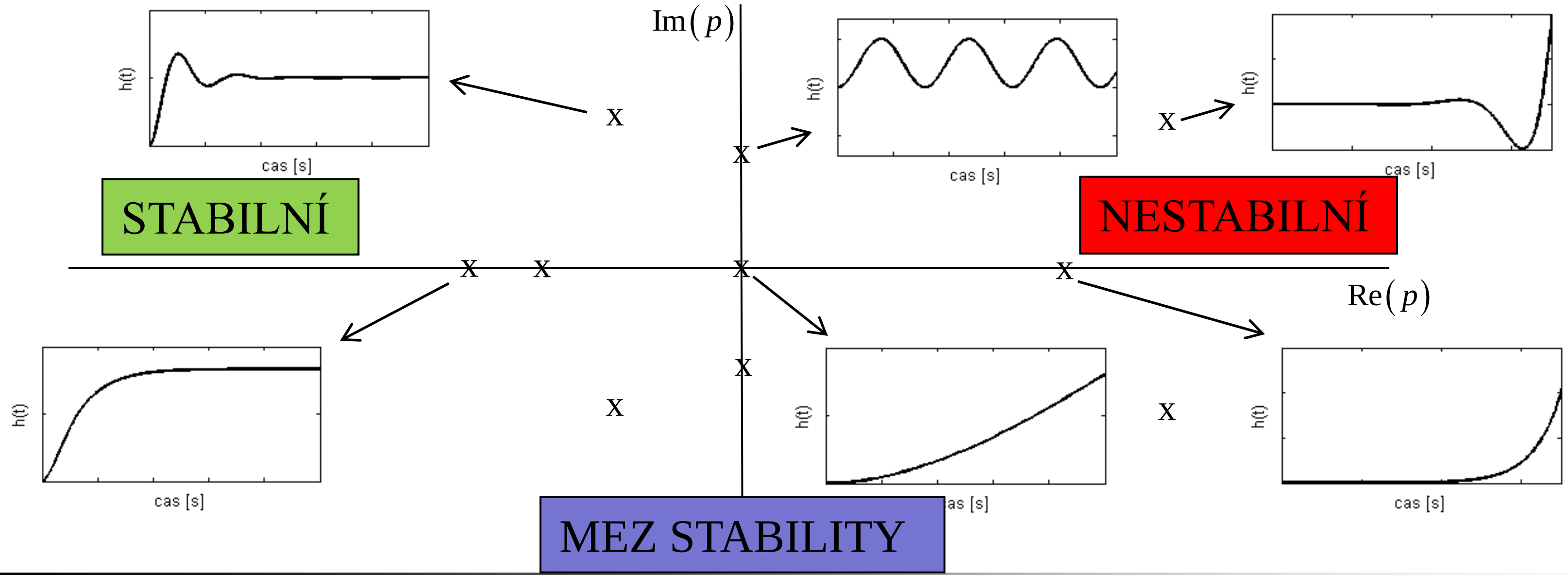
$$\mathrm{Re}(p_i) < 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

V kurzu AKS budeme systémy podle stability rozlišovat na

- **systémy stabilní:** všechny póly systému leží v levé komplexní polorovině
- **systémy na mezi stability:**

  kmitavá mez stability - existuje alespoň jedna dvojce pólů systému, které jsou komplexně sdružené a ryze imaginární. Zbývající póly systému leží v levé komplexní polorovině.

  aperiodická (nekmitavá) mez stability – některé póly systému leží v počátku komplexní roviny, zbývající póly systému leží v levé komplexní polorovině.
- **systémy nestabilní:** existuje alespoň jeden pól systému ležící v pravé komplexní polorovině.



Příklad: Rozhodněte o stabilitě systému popsaného lineární diferenciální rovnicí

$$\ddot{y}(t)+5\dot{y}(t)+6=\dot{u}(t)+u(t)$$

Postup:

1. Určíme přenos systému (za předpokladu nulových počátečních podmínek)

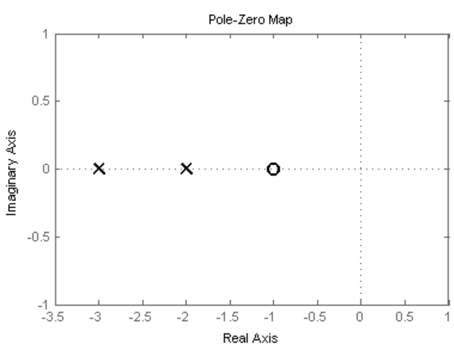
$$L\left[\ddot{y}(t)+5\dot{y}(t)+6\right]=\left[\dot{u}(t)+u(t)\right]$$

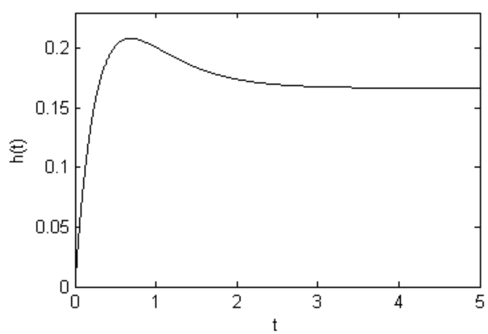
$$\left(p^2+5p+6\right)Y(p)=(p+1)U(p) \quad \Rightarrow \quad F_s(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{p+1}{p^2+5p+6}$$

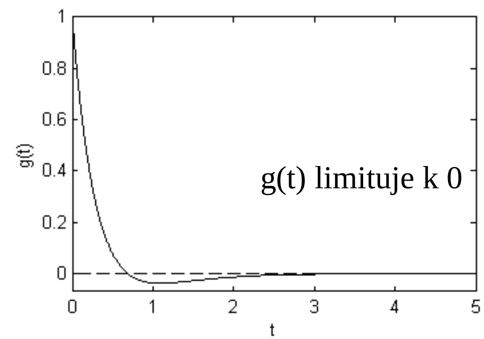
2. Vypočteme póly systému jako kořeny jmenovatele polynomu přenosové funkce

$$p^2+5p+6=0$$

$$p_1=-2,\ p_2=-3 \qquad \text{=>} \quad \text{systém je stabilní!}$$







Příklad: Rozhodněte o stabilitě systému popsaného lineární diferenciální rovnicí

$$\ddot{y}(t)+5\dot{y}(t)-6=\dot{u}(t)+u(t)$$

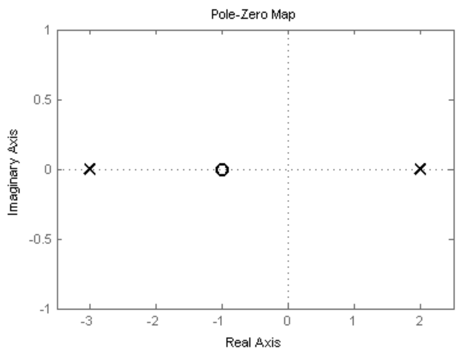
Postup:

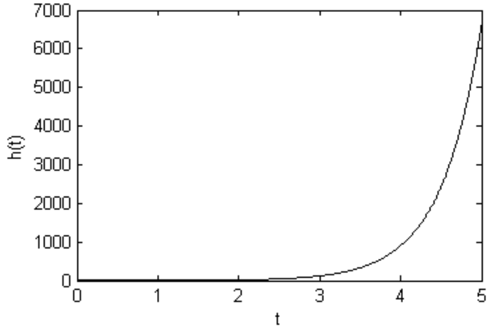
1. Určíme přenos systému (za předpokladu nulových počátečních podmínek)

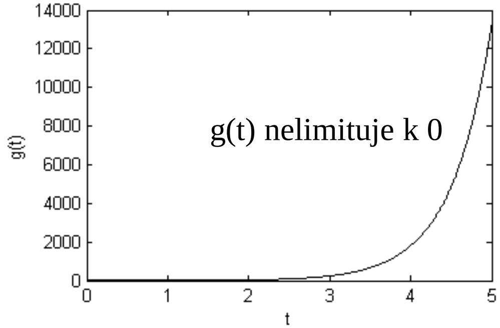
$$F_s(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{p+1}{p^2+5p-6}$$

2. Vypočteme póly systému jako kořeny jmenovatele polynomu přenosové funkce

$$p^2+5p-6=0$$
$$p_1=2,\ p_2=-3$$ => systém je nestabilní!







Příklad: Rozhodněte o stabilitě systému popsaného lineární diferenciální rovnicí

$$\ddot{y}(t)+4y(t)=\dot{u}(t)+u(t)$$

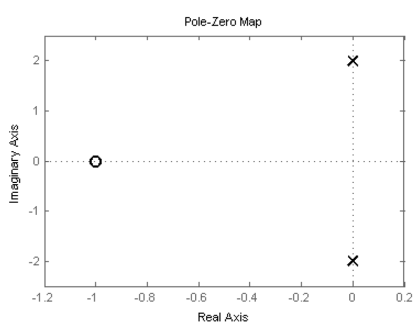
Postup:

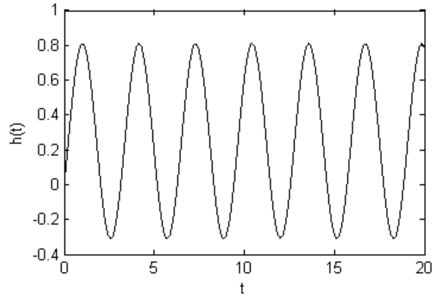
1. Určíme přenos systému (za předpokladu nulových počátečních podmínek)

$$F_s(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{p+1}{p^2+4}$$

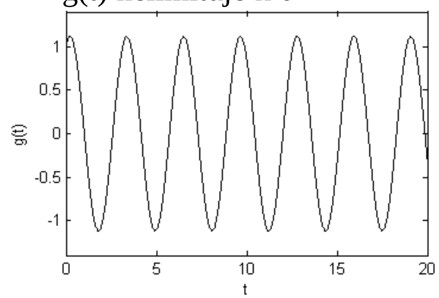
2. Vypočteme póly systému jako kořeny jmenovatele polynomu přenosové funkce

$$p^2+4=0$$
$$p_{1,2}=\pm j2$$ => systém je na mezi stability!





g(t) nelimituje k 0



Kořeny polynomů až do 4. stupně lze vypočítat analyticky. Pro polynomy vyšších stupňů již analytické vztahy neexistují. V dnešní době je již zcela běžné, že se pro řešení úlohy hledání kořenů polynomu používají numerické metody, např. Newtonova metoda. Jak se ale tento problém řešil dříve? Pro určení stability LDS není nutné znát přesné hodnoty pólů systému. Stačí pouze určit, v jaké části komplexní poloroviny leží, resp. určit znaménko reálné části jejich hodnoty. Za tímto účelem byla vypracována tzv. kritéria stability, pomocí nichž lze rozhodnout o stabilitě systému na základě koeficientů charakteristického polynomu.

Zde uvedeme tyto:

- Nutná podmínka stability
- Hurwitzovo kritérium stability

Pro určení stability systémů existují také kritéria založená na sledování vývoje frekvenční charakteristiky systému, např. Michajlovo, Nyquistovo. K Nyquistovu kritériu se ještě vrátíme v rámci 11. přednášky.

Dále budeme uvažovat charakteristickou rovnici

$$a(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0$$

jmenovatel přenosové funkce = charakteristický polynom

Nutná podmínka stability (Stodola)

Aby byl systém stabilní musí být všechny koeficienty charakteristického polynomu nenulové a se stejnými znaménky. Kromě systémů 1. a 2. řádu se jedná pouze o podmínku nutnou, nikoli o postačující!

Rozdíl mezi nutnou a postačující podmínkou stability ukážeme na příkladech.

Uvažujme systém druhého řádu jehož charakteristická rovnice je $p^2 + 2p + 1 = 0$. Koeficienty charakteristického polynomu jsou všechny nenulové a kladné. Kořeny polynomu jsou $p_{1,2} = -1$ a systém je stabilní.

Dále uvažujme systém s charakteristickou rovnicí $p^3 + p^2 + p + 1 = 0$. Koeficienty charakteristického polynomu splňují nutnou podmínku stability, avšak dva jeho kořeny jsou 0±1j a systém je tedy na mezi stability!

A naposled uvažujme systém s charakteristickou rovnicí $p^5 + p^4 + p^3 + p^2 + p + 1 = 0$. Koeficienty charakteristického polynomu opět splňují nutnou podmínky stability, avšak dva jeho kořeny jsou 0.5±0.866j a systém je nestabilní!

Hurwitzovo kritérium stability

Uvažujme LDS n-tého řádu.

1. Z koeficientů charakteristické rovnice sestavíme tzv. Hurwitzovu matici H, která bude řádu nxn

$$H = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_0 \end{bmatrix}$$

2. Vypočteme tzv. Hurwitzovy determinanty H_i, i = 1…n

$$H_1 = a_{n-1},$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix},$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix},$$

$$\vdots$$

$$H_n = a_0 H_{n-1}$$

Lineární dynamický systém je stabilní právě tehdy, když jsou všechny Hurwitzovy determinanty větší než nula. $H_i > 0, \forall i = 1, \dots, n$

Jestliže je determinant H_{n-1} roven nule pak je systém na mezi kmitavé stability. Pokud je determinant H_n roven nule a $H_{n-1}>0$ pak je systém na mezi aperiodické stability. Jestliže je jiný z Hurwitzových determinantů roven nule pak je systém nestabilní.

Příklad: Pomocí Hurwitzova kritéria rozhodněte o stabilitě systému popsaného diferenciální rovnicí

$$y^{(3)}(t)+5\ddot{y}(t)+7\dot{y}(t)+3y(t)=u(t)$$

Postup:

1. Vypočteme přenos systému a určíme jeho charakteristickou rovnici.

$$F(p)=\frac{1}{p^3+5p^2+7p+3}$$ přenos

$$p^3+5p^2+7p+3=0$$ charakteristická rovnice

1. Všechny koeficienty char. rovnice jsou kladné a nenulové – nutná podmínka stability je splněna.
2. Sestavíme Hurwitzovu matici H (3x3) a vypočteme její deteminanty H_1 až H_3 (systém je 3. řádu, n = 3).

$$H=\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & 0 \\ a_n & a_{n-2} & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow H_1=5, H_2=\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}=32, H_3=3H_2=96$$

Všechny Hurwitzovy determinanty jsou větší než nula a systém je tedy stabilní.

Příklad: Pomocí Hurwitzova kritéria rozhodněte o stabilitě systému s charakteristickou rovnicí

$$p^5 + 8p^4 + 24p^3 + 34p^2 + 24p + 6 = 0$$

Postup

1. Žádný koeficient char. rovnice není nulový a všechny mají stejná znaménka a nutná podmínka stability je tedy splněna.
2. Sestrojíme Hurwitzovu matici H (5x5) a postupně určíme všechny její determinanty H_1 až H_5.

$$H = \begin{bmatrix} 8 & 34 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 24 & 23 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 34 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 24 & 23 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 34 & 6 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = 8,$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 8 & 34 \\ 1 & 24 \end{vmatrix} = 158,$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 8 & 34 & 6 \\ 1 & 24 & 23 \\ 0 & 8 & 34 \end{vmatrix} = 3948$$

$$H_4 = \begin{vmatrix} \underline{8} & 34 & 6 & 0 \\ \underline{1} & 24 & 23 & 0 \\ 0 & 8 & 34 & 6 \\ 0 & 1 & 24 & 23 \end{vmatrix} =$$ Laplaceův rozvoj podle prvního sloupce.

$$= 8(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 24 & 23 & 0 \\ 8 & 34 & 6 \\ 1 & 24 & 23 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 34 & 6 & 0 \\ 8 & 34 & 6 \\ 1 & 24 & 23 \end{vmatrix} = 69120$$

$$H_5 = a_0 H_4 = 414720$$

Všechny Hurwitzovy determinanty jsou větší než nula a systém je tedy stabilní.

Ljapunovovy metody

Doposud jsme se zabývali vyšetřováním stability pouze lineárních systémů. Pokud třídu systémů rozšíříme také o nelineární systémy, pak nejpoužívanějšími metodami pro vyšetřování stability těchto systémů jsou Ljapunovovy metody.

První Ljapunovova metoda

Uvažujme nelineární systém popsaný stavovou rovnicí

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t)\right)$$

Stejně jako u lineárních systémů, také nelineární systémy mají své rovnovážné stavy x_r. Chování nelineárního systému v blízkém okolí rovnovážného stavu (obecně pracovního bodu) můžeme vyšetřovat tak, že provedeme lineární aproximaci systému v blízkém okolí rovnovážného stavu.

Stavová rovnice LDS

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

Matice dynamiky A je dána vztahem $A = \left.\frac{\partial f\left(x(t)\right)}{\partial x}\right|_{x(t)=x_r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(.)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(.)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(.)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(.)}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x(t)=x_r}$

Podle první Ljapunovovy metody platí:
Pokud je linearizovaný systém asymptoticky stabilní (určíme výpočtem vlastních čísel matice A), pak je v rovnovážném bodě x_r asymptoticky stabilní také původní nelineární systém.

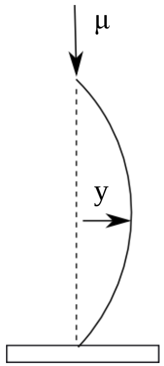
Poznámka:
Pokud je rovnovážný stav linearizovaného systému typu střed (tj. má vlastní čísla na imaginární ose), pak nelze s využitím první Ljapunovovy metody o stabilitě rovnovážného stavu nelineárního systému rozhodnout.
Chování nelineárního systému je možné vyšetřovat pomocí lineárního aproximace pouze v blízkém okolí bodu, ve kterém linearizaci provádíme (obvykle rovnovážný stav). Výsledky tohoto zkoumání mají pouze lokální charakter a vztahují se pouze na blízké okolí pracovního bodu. Totéž platí také o stabilitě.

Příklad:

Eulerův nosník $m\ddot{y} + d\dot{y} - \mu y + \lambda y + y^3 = 0$

μ – zatížení

$\lambda y(t) + y^3(t)$ – pružná síla nosníku



Zavedeme-li stavové proměnné $x_1(t) = y(t)$ a $x_2(t) = dy(t)/dt$, získáme stavový model

$$\dot{x}_1 = f_1\left(x_1, x_2\right) = x_2$$

$$\dot{x}_2 = f_2\left(x_1, x_2\right) = -dx_2 + \left(\mu - \lambda\right) x_1 - x_1^3$$

V závislosti na poměru λ a μ může mít tento systém 1 nebo 3 rovnovážné stavy. Zvolme tedy parametr d=1 a dále μ = 2 a λ = 1 (případ 3 rovnovážných stavů, λ < μ). Rovnovážné stavy systému jsou $x_{r1} = [0,0],\ x_{r2} = [1,0],\ x_{r3} = [-1,0]$

Matice dynamiky linearizovaného systému

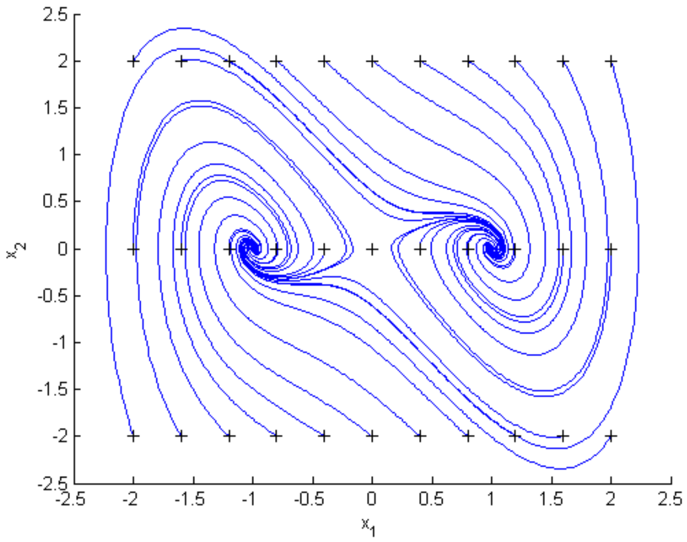
$$A = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{x_1} & \dfrac{\partial f_1}{x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{x_1} & \dfrac{\partial f_2}{x_2} \end{bmatrix}\right|_{x=x_r} = \left.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mu - \lambda - 3x_1^2 & -d \end{bmatrix}\right|_{x=x_r}$$

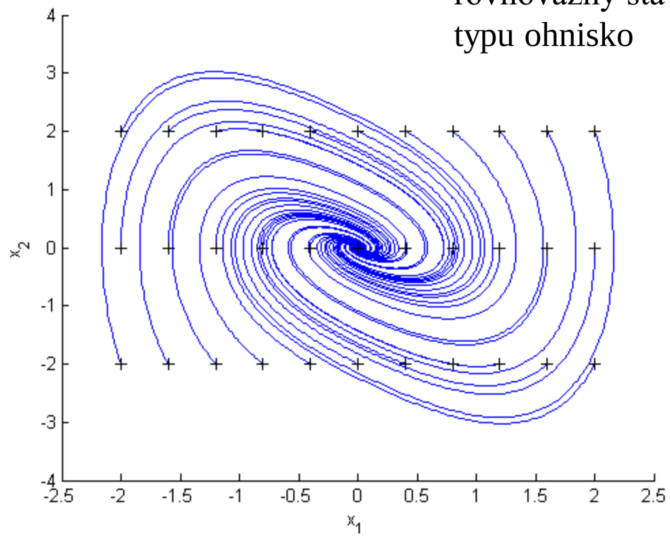
Pro jednotlivé rovnovážné stavy určíme vlastní čísla matice dynamiky

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \ \lambda_1 = -1.618, \ \lambda_2 = 0.618 \quad \Rightarrow \quad \text{sedlo, nestabilní}$$

$$A_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \ \lambda_{1,2} = -0.5 \pm j1.33 \quad \Rightarrow \quad \text{ohnisko, stabilní}$$

V případě, že $\lambda \geq \mu$ má systém jen jeden rovnovážný stav $x_r = [0,0]$ typu ohnisko





Druhá Ljapunovova metoda

Druhá Ljapunovova metoda vychází z následující myšlenky:

Pokud je dynamický systém asymptoticky stabilní, pak s rostoucím časem jeho vnitřní energie klesá, až dosáhne v rovnovážném stavu svého minima.

Tato metoda spočívá v nalezení tzv. Ljapunovovy funkce V(x,t), která představuje zobecněnou energii Systému.

Pro jednoduchost budeme dále uvažovat pouze nelineární t-invariantní autonomní systém s rovnovážným stavem $x_r = 0$.

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t)\right)$$

Před uvedením podmínky stability připomeneme následující pojmy:

Funkce $V(x)$ je

- pozitivně definitní, pokud $V(x) > 0, \quad \forall x, x \neq 0, \quad V(0) = 0$
- pozitivně semidefinitní, pokud $V(x) \geq 0, \quad \forall x, x \neq 0, \quad V(0) = 0$
- negativně definitní, pokud $V(x) < 0, \quad \forall x, x \neq 0, \quad V(0) = 0$
- negativně semidefinitní, pokud $V(x) \leq 0, \quad \forall x, x \neq 0, \quad V(0) = 0$

Jestliže v okolí rovnovážného stavu existuje diferencovatelná pozitivně definitní funkce V(x) splňující podmínky

1. $V(x) > 0,\ \forall x,\ x \neq 0, \quad V(0) = 0$

2a. $\dot{V}(x)\Big|_{\dot{x}=f(x)} = \left(\dfrac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^T \dot{x} = \left(\dfrac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^T f(x) \leq 0$ derivace Ljapunovovy funkce podél trajektorie systému

pak je rovnovážný stav systému **stabilní**. Jestliže místo podmínky 2a splňuje podmínku

2b. $\dot{V}(x)\Big|_{\dot{x}=f(x)} = \left(\dfrac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^T \dot{x} = \left(\dfrac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^T f(x) < 0$

pak je rovnovážný stav systému **asymptoticky stabilní**.

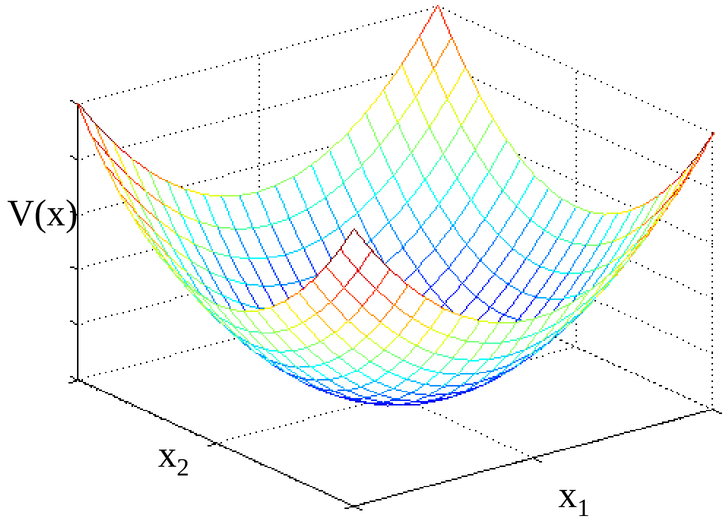
Poznámky:

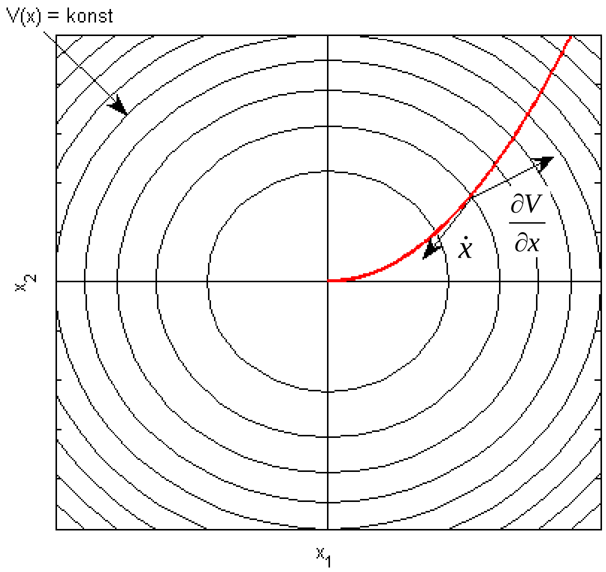
1. Obecným problémem je volba Ljapunovovy funkce.

2. Druhá Ljapunovova metoda je pouze postačující podmínkou stability, tj. jestliže se nepodaří Ljapunovovu funkci nalézt, neznamená to, že je systém nestabilní.

3. K danému systému může existovat více Ljapunovových funkcí.

Pro lepší pochopení může posloužit grafická interpretace Ljapunovovy funkce





Příklad:

Uvažujme nelineární model tlumiče, který je popsán diferenciální rovnicí

$$\ddot{y}(t)+\mu\dot{y}^3(t)+ky(t)=0 \qquad \mu>0,\ k>0$$

Vyšetřete stabilitu rovnovážného stavu tohoto systému pomocí druhé Ljapunovovy metody.

Postup:

1. Určíme rovnovážný stav systému.

Zavedeme stavové proměnné

$$\begin{aligned} x_1(t)&=y(t) \\ x_2(t)&=\dot{y}(t) \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} \dot{x}_1(t)&=x_2(t) \\ \dot{x}_2(t)&=-kx_1-\mu x_2^3(t) \end{aligned}$$

Rovnovážný stav vypočteme jako řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t)&=0 \\ \dot{x}_2(t)&=0 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad x_r=[0,0]$$

2. Určíme Ljapunovovu funkci

Celková energie systému je dána vztahem

$$E = \frac{1}{2}ky^2(t) + \frac{1}{2}v^2(t) = \frac{1}{2}kx_1^2(t) + \frac{1}{2}x_2^2(t)$$

Zjednodušíme si úlohu: zvolíme k = 1 a Ljapunovovu funkci

$$V(x) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right)$$

3. Ověříme jestli funkce V(x) splňuje podmínky 1 a 2.

podmínka 1:

$$V(x) > 0,\ \forall x,\ x \neq 0, \quad V(0) = 0$$ Splněno!

podmínka 2:

$$\dot{V}(x)\Big|_{\dot{x}=f(x)} = \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^T \dot{x} = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - \mu x_2^3 \end{pmatrix} = x_1x_2 - x_1x_2 - \mu x_2^4 = -\mu x_2^4$$

$\dot{V}(x)\Big|_{\dot{x}=f(x)} \leq 0$ rovno nule pro body [x_1,0], ne jen pro x_r Splněno!

Podle druhé Ljapunovovy metody je rovnovážný stav systému x_r = [0,0] stabilní.

Volba Ljapunovovy funkce pro lineární dynamické systémy

V případě lineárních systémů je možné Ljapunovovu funkci volit jako kvadratickou formu

$$V(x) = x^T(t)Px(t)$$

kde P je symetrická positivně definitní matice.
Z derivace Ljapunovovy funkce podél trajektorie systému lze získat vztah

$$\dot{V}(x)\Big|_{\dot{x}=f(x)} = x^T(t)\underbrace{\left[A^T P + PA\right]}_{-Q}x(t)$$

Pokud je matice Q - pozitivně semidefinitní, pak je rovnovážný stav systému $x_r = 0$ stabilní.
- pozitivně definitní, pak je rovnovážný stav $x_r = 0$ asymptoticky stabilní.

Možným postupem je zvolit symetrickou pozitivně definitní matici Q a řešením Ljapunovovy rovnice vypočítat matici P

$$A^T P + PA + Q = 0$$

Zdroje a doporučená literatura

- J. Melichar: učební texty k předmětu Lineární systémy 1, dostupné na http://www.kky.zcu.cz/uploads/courses/ls1/LS1_Ucebni_texty_2011.pdf
- J. Melichar: učební texty k předmětu Lineární systémy 1, dostupné na http://www.kky.zcu.cz/uploads/courses/ls2/LS2_Ucebni_texty_2011.pdf
- V. Srovnal – Kybernetika, skripta, VŠB – TU Ostrava, 2008 http://homel.vsb.cz/~ote009/files/kyb/Kybernetika.pdf

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Poděkování

Tento projekt je spolufinancován
Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

Projekt CZ.1.07/2.2.00/15.0383
Inovace studijního oboru Dopravní a manipulační technika
s ohledem na potřeby trhu práce