Aplikace kybernetiky ve strojírenství

2. Možnosti popisu dynamického systému, část 1

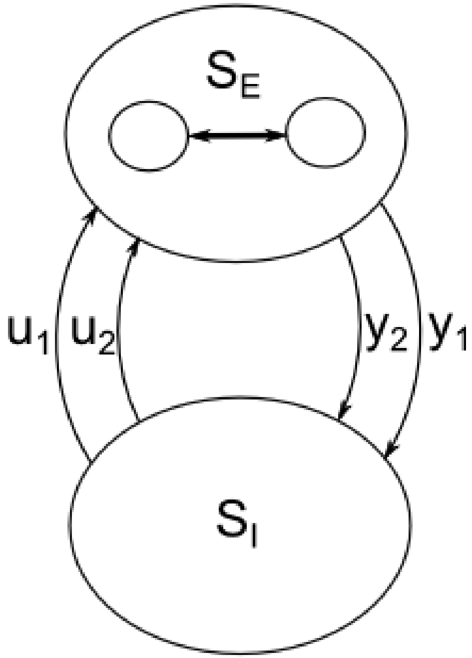
Ing. Jan Jakl, Ph.D.

Podpořeno v rámci projektu CZ.1.07/2.2.00/15.0383
Inovace studijního oboru Dopravní a manipulační technika
s ohledem na potřeby trhu práce

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Rozdělení informačních technologií

Rozdělení informačních technologií
- Prostředky – hardware, systémový software
- Metody – software, aplikační software



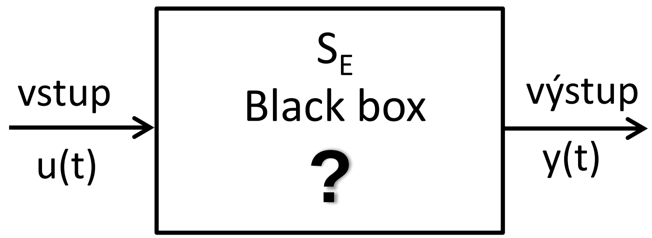
S_E – subsystém s vazbami silovými, energetickými, momentovými….
S_I – informační subsystém
u – vstupní informační vazby
y – výstupní informační vazby

K čemu slouží metody informačních technologií?
- popis S_E
- modelování S_E
- odhad parametrů a stavu S_E
- diagnostika S_E
- návrh S_I pro účely řízení a regulace

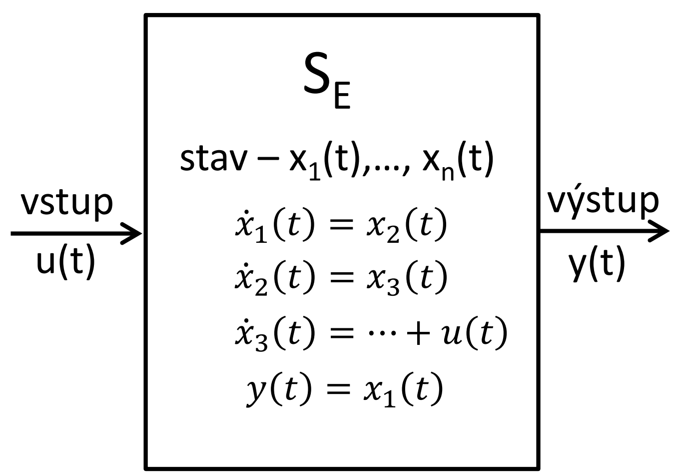
Popis dynamického systému

Základní rozdělení:

- ***Vnější popis*** *– charakterizace vztahu mezi vstupem a výstupem systému*



- ***Vnitřní popis*** *– charakterizace vztahu mezi vstupem, stavy a výstupem systému. Stav systému může mít fyzikální význam, např. dráha, rychlost, nebo může být abstraktní, např. lineární kombinace jiných složek stavu*



Metody vnějšího popisu

Popis statických vlastností *systému – popis vlastností systému v ustáleném stavu*

- *Statická charakteristika*
- *Statické zesílení*

Popis dynamických vlastností *systému*

- *Přechodová funkce, přechodová charakteristika*
- *Impulsní funkce, impulsní charakteristika*
- *Diferenciální rovnice*
- *Obrazový přenos*
- *Póly a nuly systému, časové konstanty*
- *Frekvenční přenos*
- *Frekvenční charakteristika*

Lineární systémy

Lineární systémy

Jestliže systém S_E je lineární, potom platí princip superpozice:

$$y(t) = f\left[C_1 \cdot u_1(t) + C_2 \cdot u_2(t)\right] = C_1 f\left[u_1(t)\right] + C_2 f\left[u_2(t)\right]$$
$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$$

To znamená, že pokud na systém působí více vstupních veličin (např. akční veličina regulátoru a porucha), můžeme analyzovat odezvy systému na jednotlivé vstupy odděleně. Celková odezva je pak dána součtem jednotlivých odezev systému.

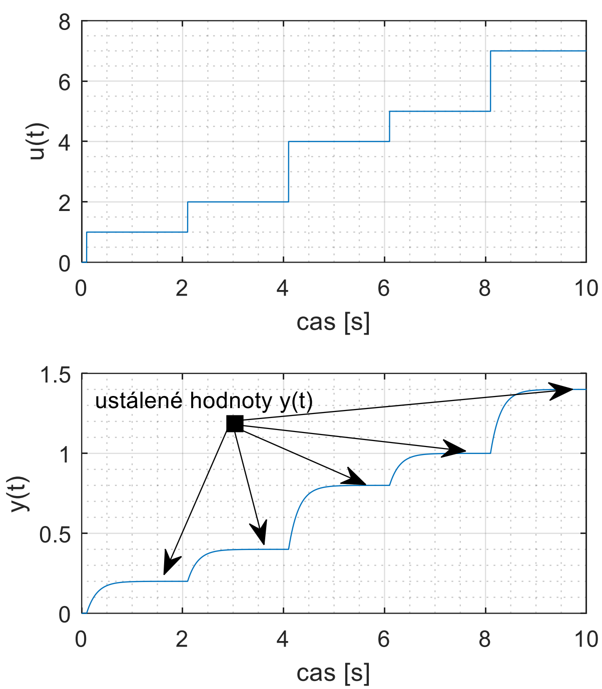
Lineární dynamické systémy

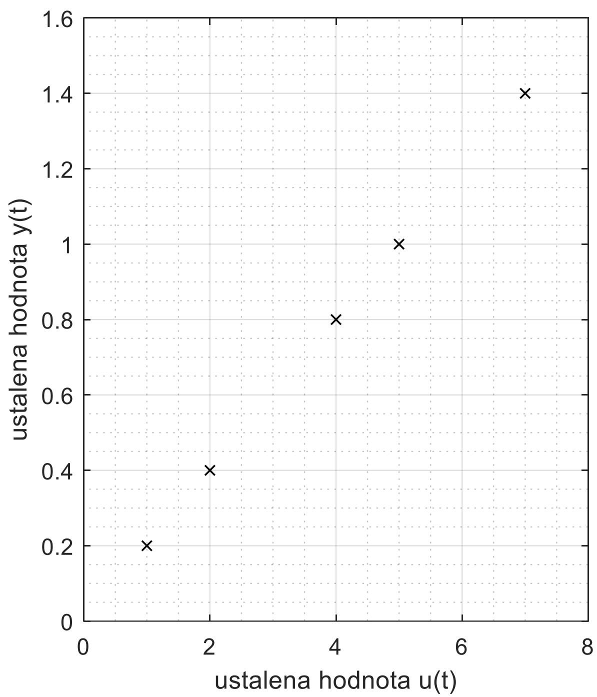
Dynamické systémy se vyznačují tím, že vývoj jejich výstupu (nebo stavu) nezávisí pouze na aktuální hodnotě, ale také na hodnotách předchozích. Na rozdíl od statických systémů, kdy se vstup s určitou modifikací ihned přenáší na výstup systému. Pro lineární dynamické systémy budeme dále používat zkratku LDS – linear dynamical systems.

Popis statických vlastností systému

Statický popis** - **závislost výstupu** systému na **vstupu** systému **v ustáleném stavu.

Statická charakteristika
Vyjádření závislosti ustálených hodnot výstupu systému na ustálených hodnotách vstupu systému ve formě grafu.



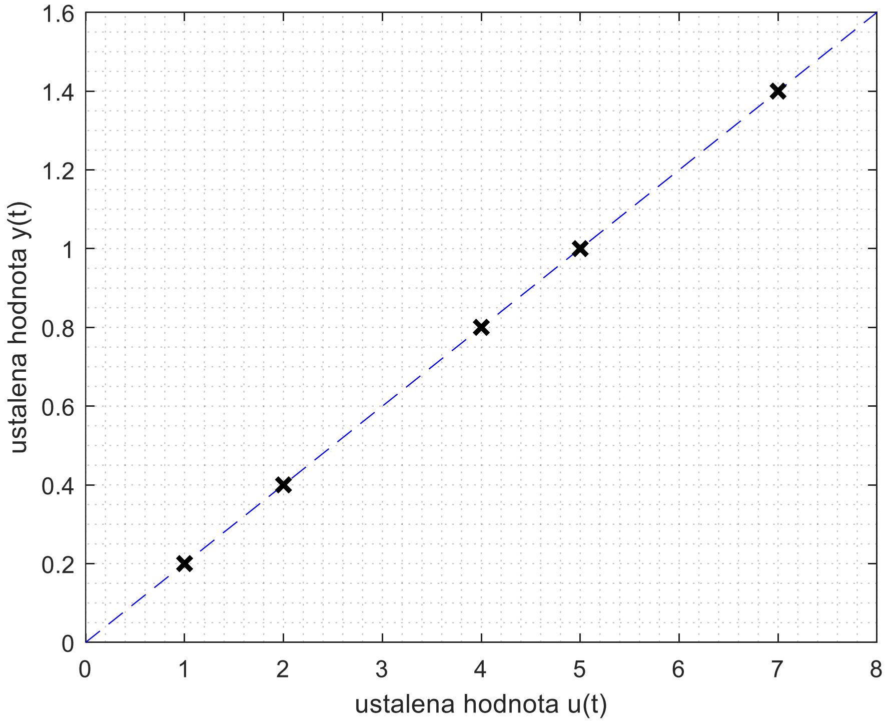


Popis statických vlastností systému

Statická zesílení

Statická charakteristika lineární systému je přímka, procházející počátkem.
Statické zesílení je rovno směrnici statické charakteristiky.

$$k = \frac{y(\infty)}{u(\infty)}$$



Popis dynamických vlasnotí systému - LDS

Popis statických vlastností *systému – popis vlastností systému v ustáleném stavu*

- *Statická charakteristika*
- *Statické zesílení*

Popis dynamických vlastností *systému*

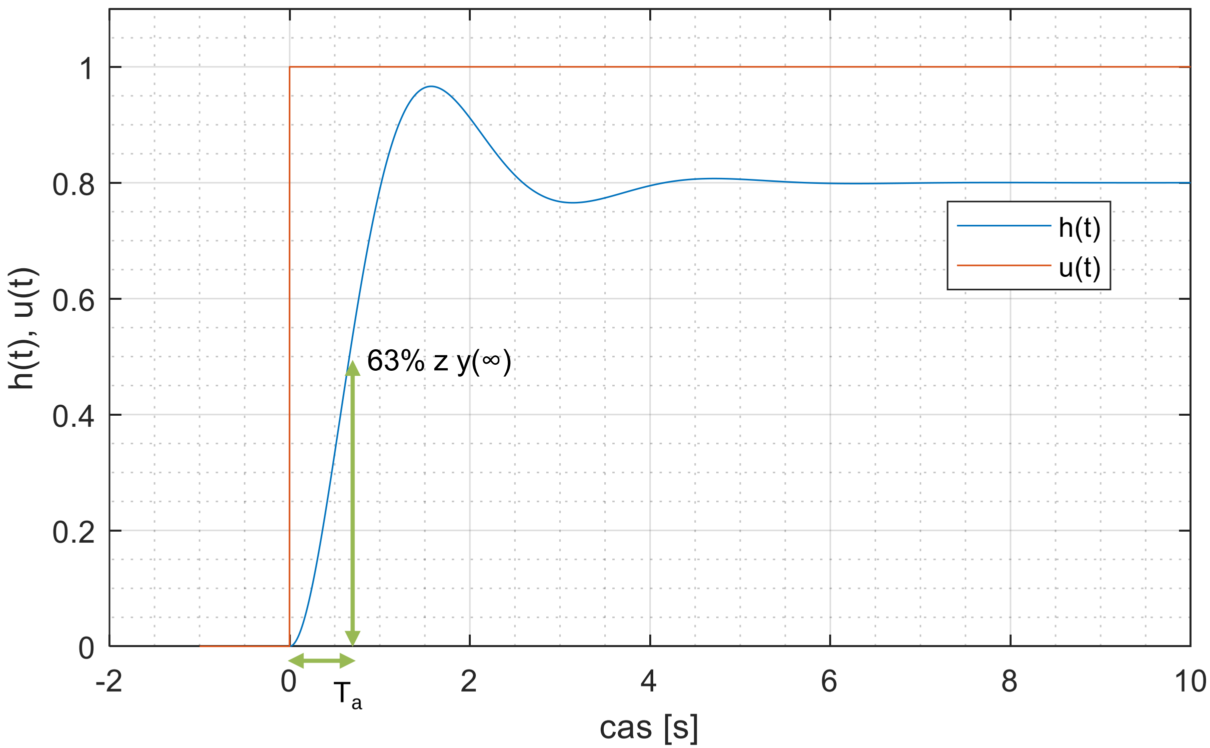
- *Přechodová funkce, přechodová charakteristika*
- *Impulsní funkce, impulsní charakteristika*
- *Diferenciální rovnice*
- *Obrazový přenos*
- *Póly a nuly systému, časové konstanty*
- *Frekvenční přenos*
- *Frekvenční charakteristika*

Přechodová funkce

Přechodová funkce
Přechodová funkce **h(t)** je odezva systému na jednotkový skok **1[t]**. Z průběhu přechodové funkce můžeme získat důležité informace o dynamice daného systému. Přechodovou funkci určujeme analyticky, na základě matematicko-fyzikálního modelování a nebo měřením.

Přechodová charakteristika – časový průběh přechodové funkce systému.
Způsob měření:
- Systém je v ustáleném stavu a vstupní veličina nabývá hodnoty 0.
- Na začátku měření (t = 0) změníme hodnotu vstupní veličiny systému z 0 na hodnotu 1.
- Měřením výstupní veličiny systému získáme přechodovou charakteristiku.

Přechodová funkce



Průběh přechodové charakteristiky souvisí s dynamickými vlastnostmi daného systému. Z přechodové charakteristiky lze jednoduše odečíst statické zesílení – jelikož je vstupem 1[t], je

$$k = y(\infty)$$

Ta – aproximativní časová konstanta, doba za kterou výstup systému poprvé dosáhne 63% z ustálené hodnoty.

Impulsní funkce

Impulsní funkce

Impulsní funkce **g(t)** je odezva systému na Diracův (jednotkový) impuls δ(t).

Vlastnosti Diracova impulsu:

$$\delta\left(t-t_0\right)=0, t\neq t_0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(t\right)dt=1$$

Vzorkovací vlastnost:

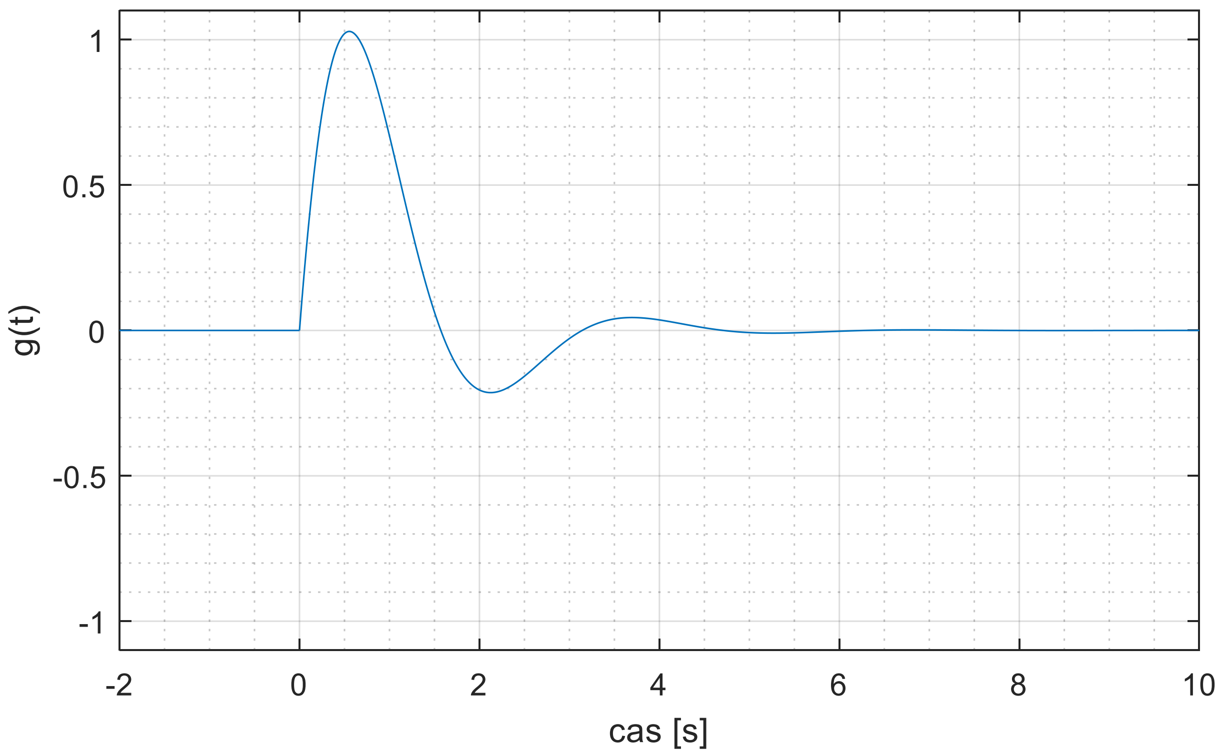
$$\int_{-\infty}^{\infty}x\left(t\right)\delta\left(t-t_0\right)dt=x\left(t_0\right)$$

Impulsní charakteristika – časový průběh impulsní funkce.

Způsob měření:

- Systém je v ustáleném stavu a vstupní veličina nabývá hodnoty 0.
- Na začátku měření (t = 0) je na vstup systému přiveden Diracův impuls δ(t).
- Měřením výstupní veličiny systému získáme impulsní charakteristiku.

Impulsní funkce

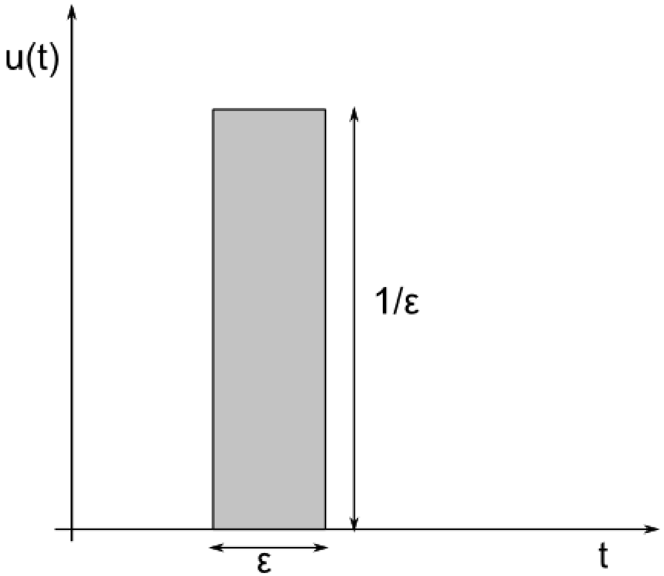


Průběh impulsní charakteristiky souvisí s dynamickými vlastnostmi daného systému.

Impulsní funkce

Diracův impuls je fyzikálně nerealizovatelný, z tohoto důvodu se pro vybuzení systému při měření impulsní charakteristiky používá jednotkový impuls.

Jednotkový impuls



Je důležité vhodně zvolit délku impulsu ε.

Doporučená volba: $\varepsilon \leq T_a$, $(\varepsilon \leq 0.1 \cdot T_a)$

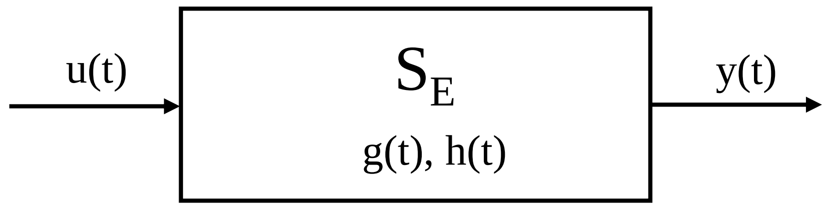
Pokud je ε voleno příliš malé, nedojde k žádanému vybuzení systému, což zanese velkou chybu do měření impulsní charakteristiky.

Diracův impuls je limitním případem jednotkového impulsu

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \delta(\varepsilon) = \delta(t)$$

Vztah přechodové a impulsní funkce

Jednoznačným popisem LDS je jeho přechodová, nebo impulsní funkce. Z jejich znalosti lze určit výstup systému y(t) na libovolný vstup u(t).



Výstup systému y(t) je dán konvolucí impulsní funkce g(t) a vstupu u(t).

$$y(t) = g(t) * u(t)$$

konvolutorní součin

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) u(t-\tau)\, d\tau$$

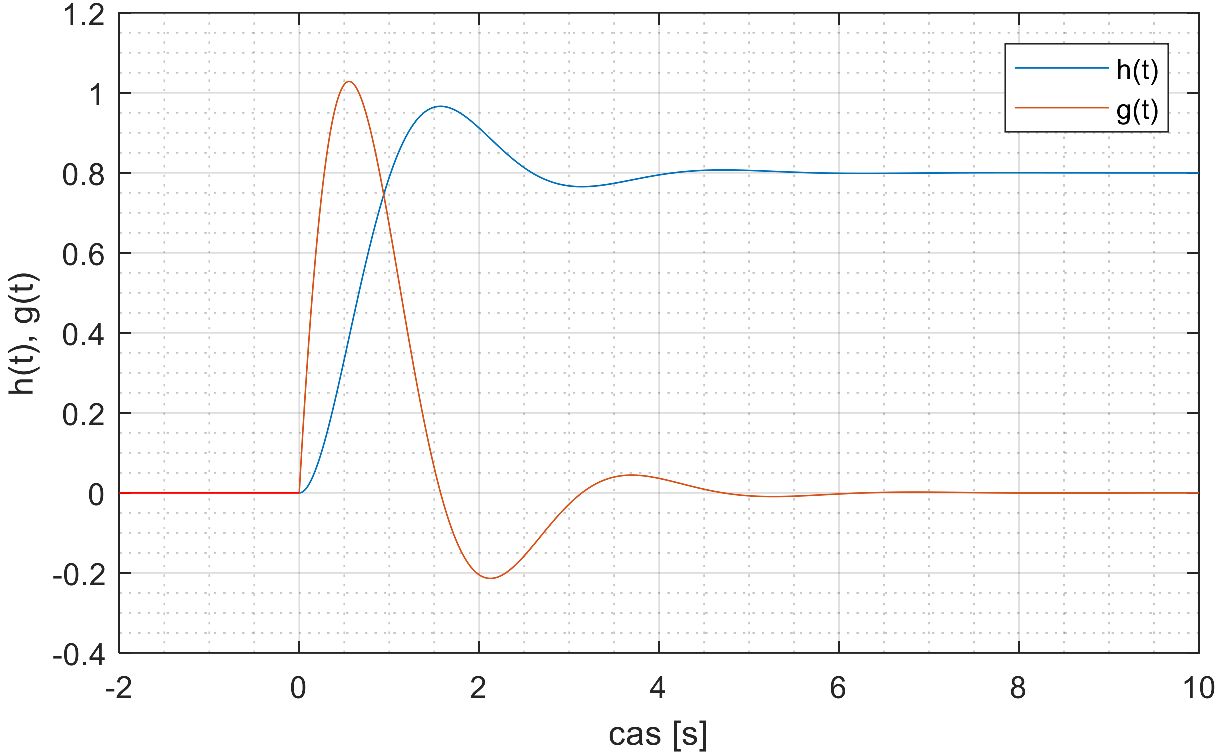
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) g(t-\tau)\, d\tau$$

konvolutorní integrál

Mezi impulsní a přechodovou funkcí platí vztah:

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}$$

Vztah přechodové a impulsní funkce



Okamžiky, kde h(t) nabývá některého z extrémů (minima, maxima) se shodují s okamžiky, kdy g(t) prochází nulou.

Lineární diferenciální rovnice

Popis LDS pomocí lineární diferenciální rovnice (LDR)

Dále se omezíme pouze na lineární časově invariantní systémy, tj. systémy s konstantními parametry. Pro tento druh systému se používá označení **LTI** systém – linear time-invariant system. Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními parametry

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\dots a_0 y(t)=b_m u^{(m)}(t)+\dots b_0 u(t)$$

kde $y^{(n)}(t)$ značí derivaci n-tého řádu funkce y(t) podle času, tj. $y^{(n)}(t)=\dfrac{d^n y(t)}{dt^n}$

Vektory $a = [a_{n-1},\dots,a_0]^T$ a $b = [b_m,\dots,b_0]^T$ nazýváme vektory parametrů. Řešení výše uvedené LDR je dáno součtem homogenního (obecného) řešení (u(t) ≡ 0) a partikulárního řešení nehomogenní rovnice.

$$y(t)=y_0(t)+y_p(t)$$

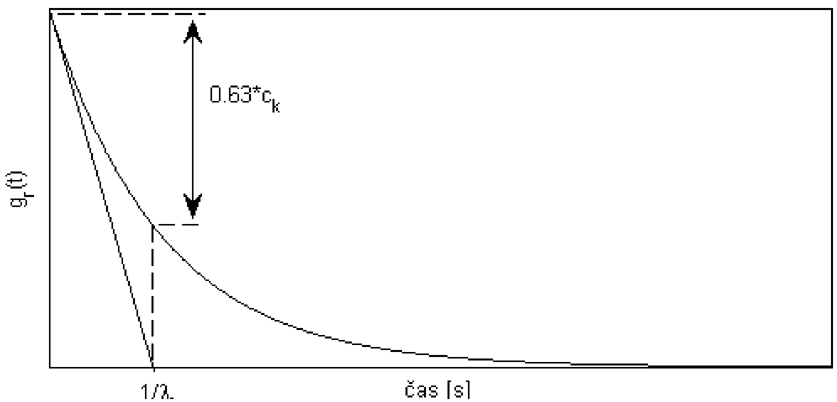
Výpočet obecného (homogenního) řešení LDR vede na řešení charakteristické rovnice

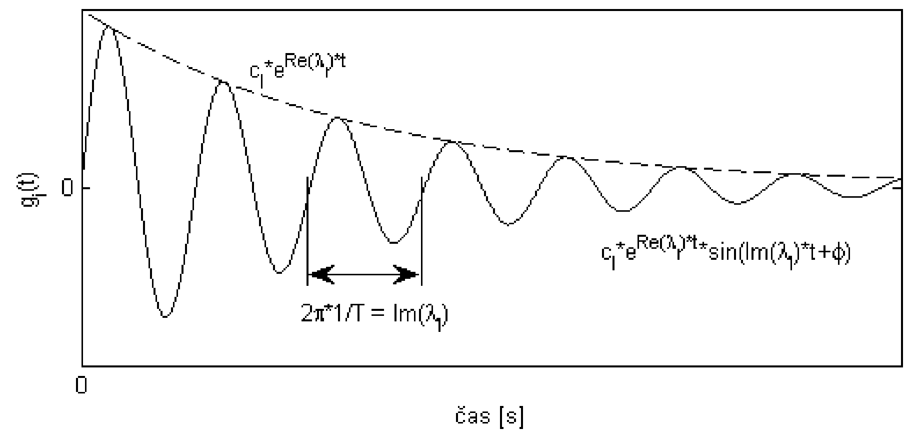
$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda+\dots+a_1\lambda+a_0=0$$

Lineární diferenciální rovnice

Pokud má tento polynom n_1 reálných kořenů λ_i a n_2 komplexních kořenů λ_j (vždy po dvou komplexně sdružených) přičemž musí platit $n_1 + n_2 = n$, pak lze obecné řešení LDR zapsat ve tvaru:

$$y_0(t) = \sum_{k=1}^{n_1} c_k e^{\lambda_k t} + \sum_{l=1}^{n_2} c_l e^{\lambda_l (t)} = \sum_{k=1}^{n_1} c_k e^{\lambda_k t} + \sum_{l=1}^{n_2} c_l e^{\mathrm{Re}(\lambda_l) t} \sin\left(\mathrm{Im}(\lambda_l) t + \varphi\right)$$





Podmínka fyzikální realizovatelnosti LDS:

$$\boxed{n \geq m}$$

Laplaceova transformace

Laplaceova transformace

Laplaceova transformace je integrální transformací s jádrem e^{-pt}, kde p je komplexní proměnná $p = \sigma + j\omega$.

$$\boxed{Y(p) = L\left[y(t)\right] = \int_0^\infty y(t)\cdot e^{-pt}dt}$$

Y(p) je Laplaceův obraz funkce y(t) (y(t) se také označuje jako originál Y(p)).

Podmínky existence Y(p)

- funkce y(t) je jednoznačná a po úsecích hladká
- funkce y(t) = 0, pro t<0 (kauzalita)
- funkce y(t) je exponenciálního řádu, tj. $\int_0^\infty \left|f(t)\right| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$ pro $\sigma_0 > 0$.

Inverzní Laplaceova transformace

$$\boxed{y(t) = L^{-1}\left[Y(p)\right] = \frac{1}{2\pi j}\oint_G Y(p)e^{pt}dt = \sum_i resY(p_i)e^{p_i t}}$$

$resY(p_i)$ označuje residuum funkce $Y(p_i)$ (hodnotu funkce Y(p) pro $p = p_i$).

Laplaceova transformace

Základní vlastnosti Laplaceovy transformace

Linearita

$$y(t) = k_1 \cdot y_1(t) + k_2 \cdot y_2(t)$$
$$Y(p) = k_1 \cdot Y_1(p) + k_2 \cdot Y_2(p)$$

Věta o obrazu časové derivace funkce

$$L\{y'(t)\} = p \cdot Y(p) - y(0^+)$$
$$L\{y^{(n)}(t)\} = p^n \cdot Y(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} \cdot y^{(k)}(0^+)$$

Věta o obrazu integrálu funkce

$$L\left\{\int_0^t y(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{p} \cdot Y(p)$$

Věta o počáteční hodnotě

$$\lim_{t \to 0} y(t) = \lim_{p \to \infty} p \cdot Y(p)$$

Věta o koncové hodnotě

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{p \to 0} p \cdot Y(p)$$

Laplaceova transformace

Příklad:

Vypočítejte Laplaceovu transformaci funkce y(t) = sin(3t) + e^{-3t}.

Při výpočtu využijeme linearitu Laplaceovy transformace.

$$L\{y(t)\} = \int_0^\infty \sin(3t) e^{-pt} dt + \int_0^\infty e^{-3t} e^{-pt} dt$$

$$Y(p) = \frac{1}{2j} \int_0^\infty \left(e^{j3t} - e^{-j3t} \right) e^{-pt} dt + \int_0^\infty e^{-(p+3)t} dt$$

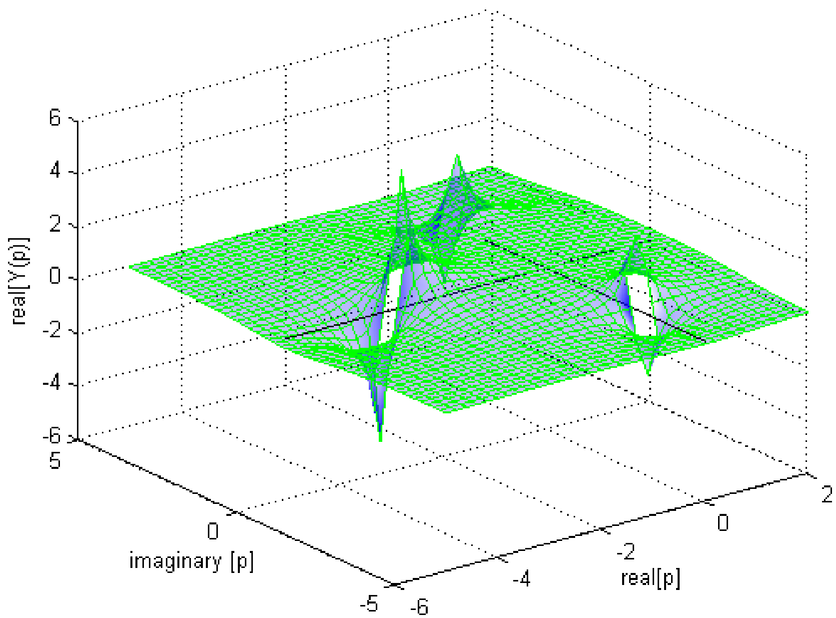
$$Y(p) = \frac{1}{2j} \int_0^\infty \left(e^{-(p-j3)t} - e^{-(p+j3)t} \right) dt + \int_0^\infty e^{-(p+3)t} dt$$

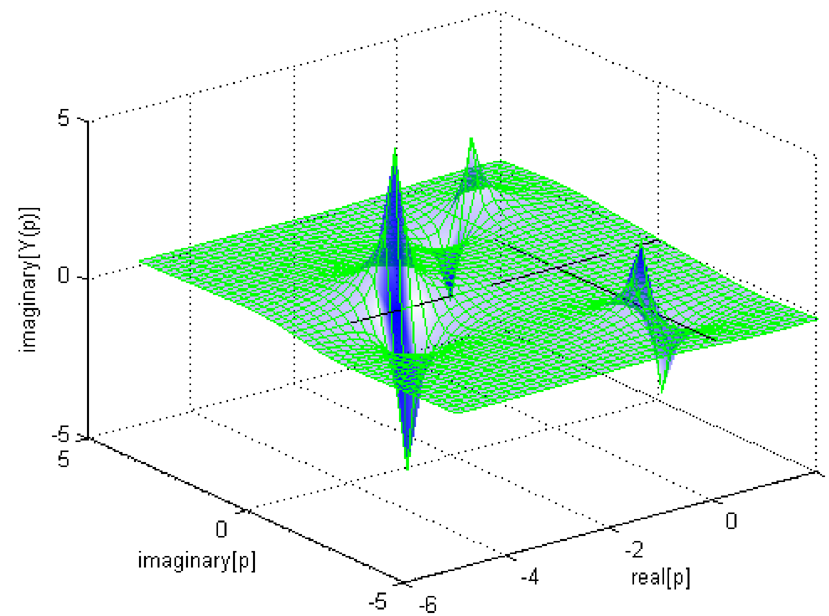
$$Y(p) = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{p-j3} - \frac{1}{p+j3} \right) + \frac{1}{p+3} = \frac{3}{p^2+9} + \frac{1}{p+3}$$

Laplaceův obraz funkce y(t) je komplexní funkcí komplexní proměnné p.

Pro základní funkce byla sestavena „převodní“ tabulka, se kterou lze snadno použít pro dopřednou i zpětnou Laplaceovu transformaci.

Laplaceova transformace





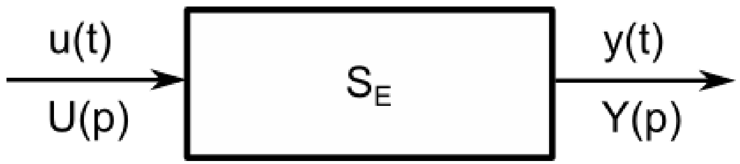
Laplaceova transformace

Tabulka Laplaceovy transformace

y(t)	Y(p)
1	$\frac{1}{p}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
$\sin(bt)$	$\frac{b}{p^2+b^2}$
$\cos(bt)$	$\frac{p}{p^2+b^2}$
$e^{at}f(t)$	$F(p-a)$
$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$e^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(p-a)^2+b^2}$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$
$t\sin(bt)$	$\frac{2bp}{(p^2+b^2)^2}$
$t\cos(bt)$	$\frac{p^2-b^2}{(p^2+b^2)^2}$

Obrazový přenos

Obrazový přenos



Obrazový přenos je definován jako podíl Laplaceova obrazu výstupní veličiny Y(p) ku Laplaceově obrazu vstupní veličiny U(p), při nulových počátečních podmínkách (dále jen n.p.p.), tj. $u(t_0) = 0$, $y(t_0) = 0$,…

$$F_{SE}(p) = \left.\frac{L\{y(t)\}}{L\{u(t)\}}\right|_{n.p.p.} = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

Y(p) je polynom obecně stupně n a U(p) je polynom obecně stupně m.
Podmínka fyzikální realizovatelnosti systému:

$$n \geq m$$

Obrazový přenos

Proč zavádíme obrazový přenos?

- umožňuje jednodušší analýzu S_E
- umožňuje jednodušší návrh S_I jako regulátoru pro S_E
- umožňuje jednodušší vyjádření soustavy více S_E propojených informačními vazbami – algebra blokových schémat.

Dále budeme místo označení $F_{SE}(p)$ používat pouze $F_S(p)$.

.

Obrazový přenos

Výpočet obrazového přenosu pro systém popsaný LDR:

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\ldots a_0 y(t)=b_m u^{(m)}(t)+\ldots b_0 u(t)$$

Aplikujme Laplaceovu transformaci na levou i pravou stranu LDR:

$$L\left\{y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\ldots a_0 y(t)\right\}=L\left\{b_m u^{(m)}(t)+\ldots b_0 u(t)\right\}$$

$$L\left\{y^{(n)}(t)\right\}+a_{n-1}L\left\{y^{(n-1)}(t)\right\}+\ldots+a_0 L\left\{y(t)\right\}=b_m L\left\{u^{(m)}(t)\right\}+\ldots b_0 L\left\{u(t)\right\}$$

Při výpočtu využijeme linearitu Laplaceovy transformace a větu o obrazu derivace funkce.

$$p^n Y(p)+a_{n-1}p^{n-1}Y(p)+\ldots a_0 Y(p)=b_m p^m U(p)+\ldots b_0 U(p)$$

$$\Downarrow$$

$$F_S(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{b(p)}{a(p)}=\frac{b_m p^m+\ldots+b_0}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_0}$$

Obrazový přenos

V některých případech se používají i jiné zápisy přenosové funkce.

1.

$$F_S(p) = \frac{b_m p^m + \ldots + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_0} = \frac{b_0}{a_0}\frac{\frac{b_m}{b_0}p^m + \ldots + 1}{\frac{1}{a_0}p^n + \frac{a_{n-1}}{a_0}p^{n-1} + \ldots + 1} = k_s \frac{\bar{b}_m p^m + \ldots + 1}{\bar{a}_n p^n + \bar{a}_{n-1}p^{n-1} + \ldots + 1}$$

kde k_s je statické zesílení systému, které udává jak se vstupní signál při průchodu systémem zesílí (popř. zeslabí).

2. Jelikož jmenovatel i čitatel přenosové funkce jsou polynomy, můžeme přenosovou funkci zapsat ve tvaru součinu kořenových činitelů:

$$F_S(p) = \frac{b_m p^m + \ldots + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_0} = \frac{b_m(p-n_1)(p-n_2)\ldots(p-n_m)}{(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_n)}$$

Póly systému

Póly systému jsou takové hodnoty p_i, i = 1,…n, pro které platí a(p=p_i) = 0.

$$F_S(p_i) = \pm\infty$$

Nuly systému

Nuly systému jsou takové hodnoty n_j, j = 1,…m, pro které platí b(p=n_j) = 0.

$$F_S(n_j) = 0$$

Póly i nuly systému mohou být reálné, komplexně sdružené a nebo ryze imaginární.
Poloha pólů a nul v komplexní rovině charakterizuje dynamické vlastnosti LDS.

Obrazový přenos

3. Zápis obrazového přenosu ve tvaru časových konstant

$$F_S(p) = \frac{b_m p^m + \ldots + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_0} = \frac{b_0}{a_0} \frac{(\tau_1 p + 1)(\tau_2 p + 1)\ldots(\tau_m p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)\ldots(T_n p + 1)}$$

Časové konstanty jsou rovny převráceným hodnotám záporně vzatých pólů a nul.

$$\tau_j = -\frac{1}{n_j}, T_i = -\frac{1}{p_i}$$

Pozor: póly a nuly musí být reálné.

Obrazový přenos

Stupeň astatismu
Stupeň astatismu systému je roven počtu pólů systému v počátku. Astatismus souvisí integrálním charakterem systému.

Stupeň derivace
Stupeň derivace je roven počtu nul systému v počátku.

$$F_S(p) = p^k \frac{b_m(p-n_1)(p-n_2)\ldots(p-n_{m-n_z})}{(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_{n-p_z})}$$

Pokud má systém některé nuly nebo póly v počátku ($p_i = 0$, $n_j = 0$) pak

$$k = n_z - p_z$$

n_z je počet nul v počátku
p_z je počet pólů v počátku

kde $k > 0$ určuje řád derivace a $k < 0$ řád astatismu. Pokud $k = 0$, pak se jedná o systém bez astatismu.

Obrazový přenos

Rozklad na parciální zlomky

$$F_S(p)=\frac{b(p)}{a(p)}=\frac{r_1}{p-p_1}+\ldots+\frac{r_n}{p-p_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{r_k}{p-p_k}$$

kde $r_1,\ldots, r_n$ jsou residua funkce $F_s(p)$.

Pro výpočet residuí platí tyto vztahy

- jednonásobný pól

$$r_i=\lim_{p\to p_i}\left[F(p)(p-p_i)\right]$$

- násobné póly
  n-té residuum k-násobného pólu

$$^{n}r_i=\lim_{p\to p_i}\left\{\frac{1}{(k-n)!}\frac{d^{k-n}}{dp^{k-n}}\left[F(p)(p-p_i)^k\right]\right\}$$

Rozklad obrazového přenosu, nebo obecně jakéhokoli Laplaceova obrazu nějaké funkce se používá zejména pro zpětnou Laplaceovu transformaci (zpět do časové oblasti).

Obrazový přenos

Příklad:

LDS je popsán lineární diferenciální rovnicí 2. řádu:

$$\ddot{y}(t)+5\dot{y}(t)+6y(t)=u(t)$$

1. Určete přenosovou funkci daného systému.
2. Vypočtěte statické zesílení a určete nuly a póly systému.
3. Zapište přenosovou funkci ve tvaru časových konstant.
4. Přenosovou funkci rozložte na parciální zlomky a určete zpětnou Laplaceovu transformaci.

Předpokládejte, že všechny počáteční podmínky jsou nulové.

Řešení 1:

$$L\{\ddot{y}(t)+5\dot{y}(t)+6y(t)\}=L\{u(t)\}$$
$$p^2Y(p)+5pY(p)+6Y(p)=U(p)$$

Přenos systému tedy je

$$F_S(p)=\left.\frac{Y(p)}{U(p)}\right|_{n.p.p.}=\frac{1}{p^2+5p+6}$$

Obrazový přenos

Řešení 2:

Pro výpočet statického zesílení přepíšeme přenosovou funkci do tvaru

$$F_s(p) = \frac{1}{p^2 + 5p + 6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\frac{1}{6}p^2 + \frac{5}{6}p + 1}$$

Statické zesílení je tedy k = 1/6.

Z uvedeného tvaru systému plyne, že nemá žádnou nulu. Póly systému určíme jako kořeny rovnice

$$p^2 + 5p + 6 = 0$$

Rovnice má řešení p_1 = -2 a p_2 = -3.

$$F_s(p) = \frac{1}{(p+2) \cdot (p+3)}$$

Řešení 3:

Ze dvou pólů systému vypočteme dvě časové konstanty

$$T_1 = -\frac{1}{p_1} = \frac{1}{2}, \quad T_2 = -\frac{1}{p_2} = \frac{1}{3}$$

Přenosová funkce ve tvaru časových konstant

$$F_s(p) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{2}p + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3}p + 1\right)}$$

Obrazový přenos

Řešení 4:

Systém má dva různé póly a pro výpočet reziduí (dvou) použijeme vztah

$$r_i = \lim_{p \to p_i} \left[F(p)(p - p_i) \right]$$

Pro jednotlivá rezidua platí

$$r_1 = \lim_{p \to -2} \left[\frac{1}{(p+2) \cdot (p+3)} \cdot (p+2) \right] = \ldots$$
$$r_2 = \lim_{p \to -3} \left[\frac{1}{(p+2) \cdot (p+3)} \cdot (p+3) \right] = \ldots$$

Obrazový přenos

Řešení 4:

Systém má dva různé póly a pro výpočet reziduí (dvou) použijeme vztah

$$r_i = \lim_{p \to p_i} \left[F(p)(p - p_i) \right]$$

Pro jednotlivá rezidua platí

$$r_1 = \lim_{p \to -2} \left[\frac{1}{(p+2)\cdot(p+3)} \cdot (p+2) \right] = 1$$
$$r_2 = \lim_{p \to -3} \left[\frac{1}{(p+2)\cdot(p+3)} \cdot (p+3) \right] = -1$$

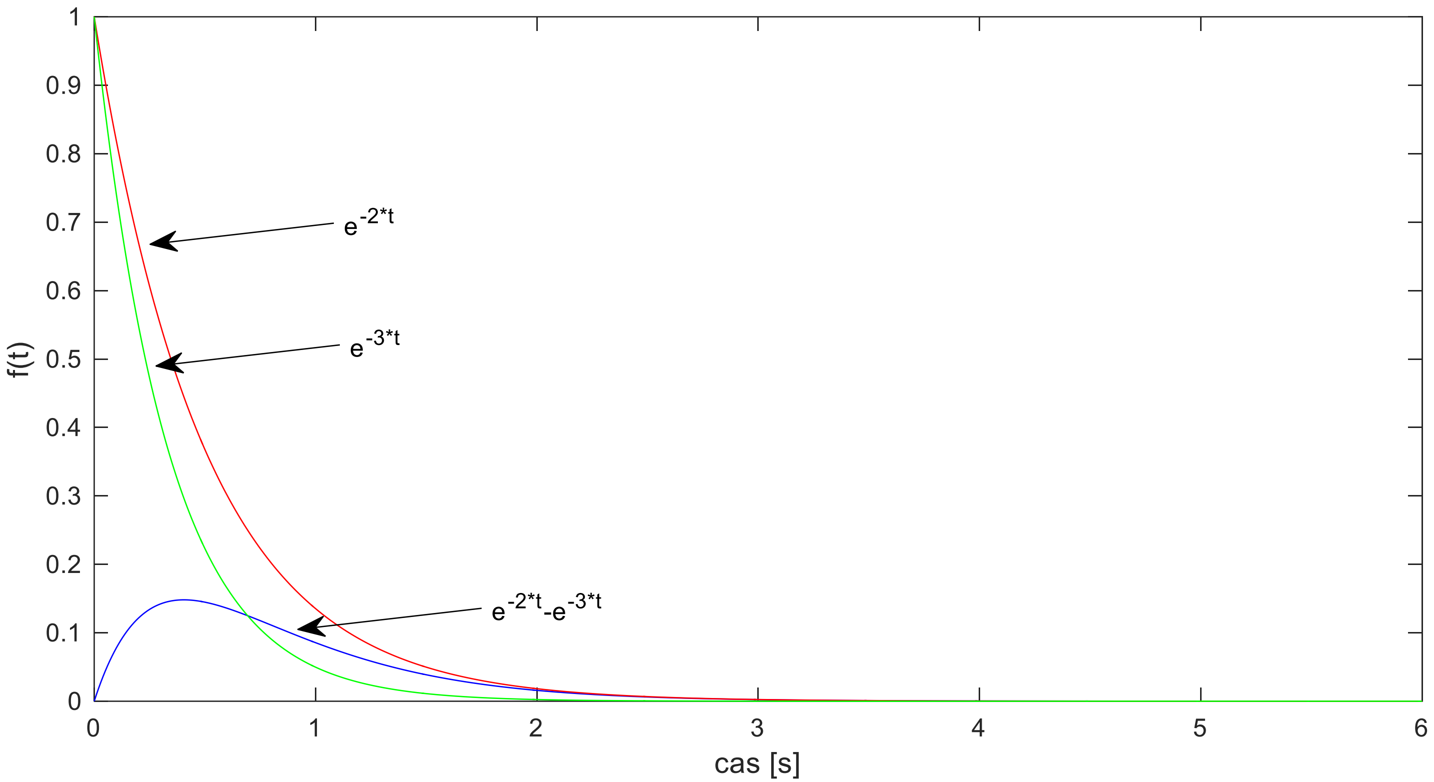
Přenos ve tvaru parciálních zlomků

$$F_S(p) = \frac{1}{p+2} - \frac{1}{p+3}$$

Zpětná (inverzní) Laplaceova transformace

$$f(t) = L^{-1}\{F_S(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p+2}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{p+3}\right\} = e^{-2\cdot t} - e^{-3\cdot t}$$

Obrazový přenos



Určení odezvy systému z obrazového přenosu

Výpočet odezvy systému z obrazového přenosu

V případě, že pro daný vstup u(t) existuje jeho Laplaceův obraz U(p), můžeme stanovit odezvu systému na základě obrazového přenosu systému.

$$F_S(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} \quad \Rightarrow \quad Y(p) = F_S(p)U(p) \quad \Rightarrow \quad y(t) = L^{-1}\{Y(p)\} = L^{-1}\{F_S(p)U(p)\}$$

Speciální případy

Impulsní funkce

Odezva systému na diracův impuls δ(t).

$$u(t) = \delta(t) \rightarrow U(p) = 1$$

$$g(t) = y(t) = L^{-1}\{G(p)\} = L^{-1}\{F_S(p)U(p)\} = L^{-1}\{F_S(p)\}$$

To jsme spočítali v předchozím příkladě

Přenos systému je tedy Laplaceova transformace impulsní funkce.

Přechodová funkce

Odezva systému na jednotkový skok 1[t].

$$u(t) = 1[t] \rightarrow U(p) = \frac{1}{p}$$

$$h(t) = y(t) = L^{-1}\{H(p)\} = L^{-1}\{F_S(p)U(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{F_S(p)}{p}\right\}$$

Určení odezvy systému z obrazového přenosu

Příklad: Ze zadaného obrazového přenosu určete impulsní a přechodovou funkci systému

$$F_s(p) = \frac{2}{p+4}$$

Jedná se o systém 1. řádu.

Řešení:

Výpočet g(t)

$$g(t) = L^{-1}\{F_s(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{p+4}\right\} = 2 \cdot e^{-4t}$$

Výpočet h(t):

1. Integrací g(t)

$$h(t) = \int_0^t g(\tau)d\tau = 2 \cdot \int_0^t e^{-4\tau}d\tau =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (1 - e^{-4t})$$

1. S využitím přenosové funkce

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{F\ (p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{p \cdot (p+4)}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p+4}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} 1[t] - \frac{1}{2} e^{-4t}$$

Zdroje a doporučená literatura

Zdroje doporučená literatura

- F. Tůma: Kybernetika, skripta, ZČU v Plzni
- J. Melichar: učební texty k předmětu Lineární systémy 1, ZČU v Plzni, dostupné na http://www.kky.zcu.cz/uploads/courses/ls1/LS1_Ucebni_texty_2011.pdf
- V. Srovnal: Kybernetika, skripta, VŠB – TU Ostrava, 2008 http://homel.vsb.cz/~ote009/files/kyb/Kybernetika.pdf
- I. Švarc: učební texty k předmětu Automatizace a regulace, VUT v Brně, dostupné na http://autnt.fme.vutbr.cz/svarc/ZakladyAutomatizace.pdf