

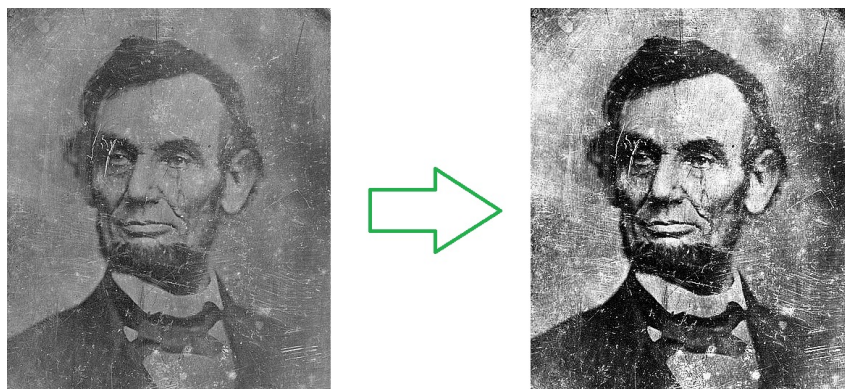
# Adaptive Histogram Equalization, Histogram processing and Convolution

Ing. Marek Hruz Ph.D.  
Katedra kybernetiky

Plzeň  
23. září 2015

## 1 Adaptivní ekvalizace histogramu

Ekvalizace histogramu je metoda počítačového vidění, která mění kontrast obrazu. Většinou se jedná o zvýšení kontrastu, tak aby byly všechny jasy zastoupeny uniformně (rovnoměrně). To zvýrazní některé detaily v obraze. Metoda je vhodná jako jasová/kontrastní normalizace  $\Rightarrow$  předzpracování obrazu pro další zpracování. Vhodné pro uniformně osvětlené scény. Obecně může být podmínka uniformnosti nahrazena jiným rozložením. Můžeme například požadovat, že rozložení jasů bude gaussovské.



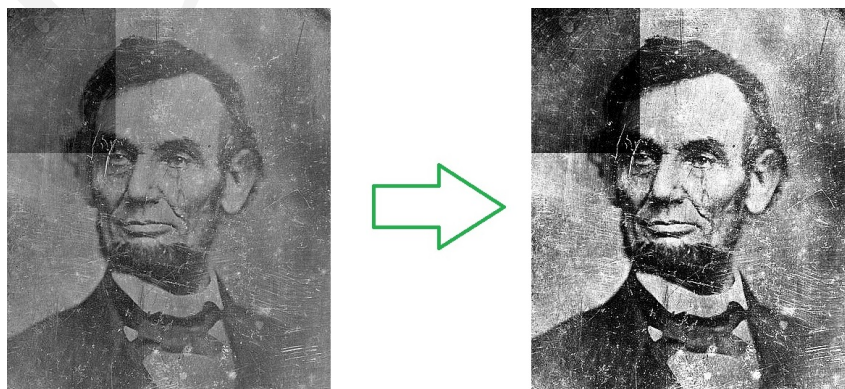
Obrázek 1: Ekvalizace histogramu

Algoritmus hledá takovou jasovou transformaci  $T$ , která minimalizuje vztah

$$|c_1(T(k)) - c_0(k)|, \quad (1)$$

kde  $c_x$  je kumulativní histogram. Na transformaci je kladená podmínka monotónnosti. To vyplývá z předpokladu, že když je v původním obrázku jas jednoho pixelu menší než jiného, tak to bude ve výsledku zachováno taky. Při samotném odvozování algoritmu se často používá transformace náhodných veličin.

Pokud je obraz nerovnoměrně osvětlen, tak metoda ekvalizace histogramu nepřináší vhodné výsledky (viz. Obr. 2). Je to kvůli globálním charakteristikám metody. Jasy v tmavé oblasti jsou považovány za přirozené.



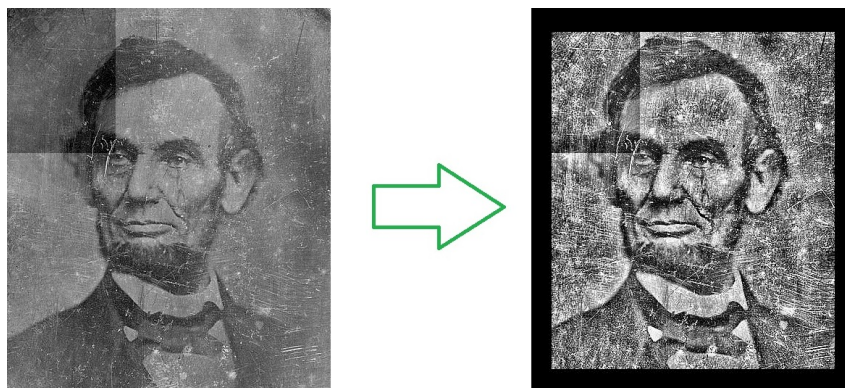
Obrázek 2: Ekvalizace histogramu pro nerovnoměrně osvětlený obraz

V tomto případě je vhodné použít metodu **adaptivní ekvalizace histogramu**. Tato

## 1 ADAPTIVNÍ EKVALIZACE HISTOGRAMU

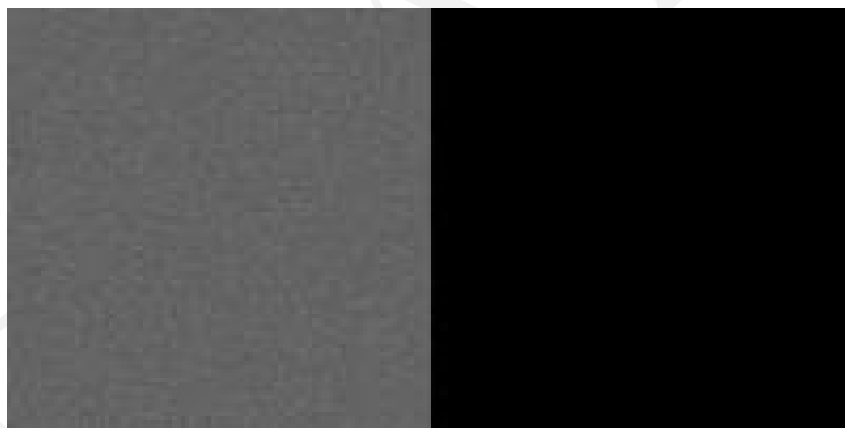
---

metoda ekvalizuje histogram po částech obrazu. Pro každý pixel se vypočte ekvalizovaný histogram z jeho definovaného okolí. Hodnota jasu pixelu je potom nahrazena jeho ekvalizovanou hodnotou (viz. Obr. 3).



Obrázek 3: Adaptivní ekvalizace histogramu pro nerovnoměrně osvětlený obraz

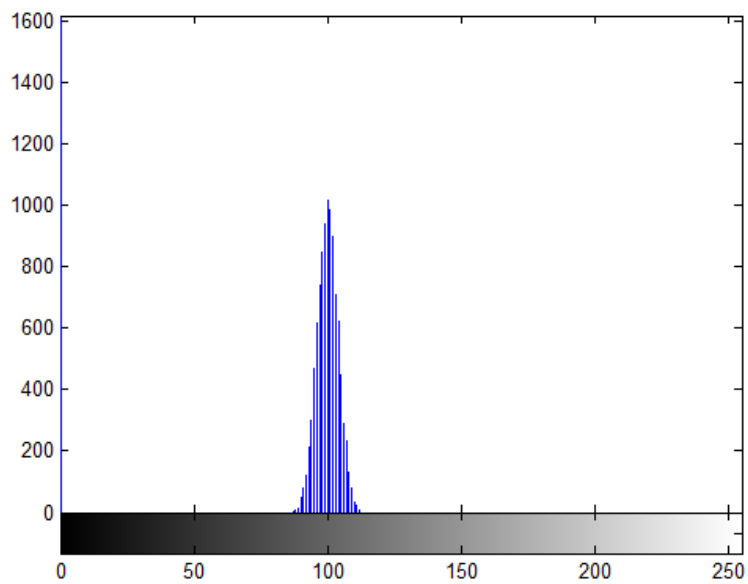
Problémy nastávají na okrajích obrázku, kde není známé okolí. Metoda nepřináší vhodné výsledky pokud je přítomen šum typu "salt & pepper". Obzvláště v homogenních oblastech je šum zvýrazněn. Na Obr. 4 je ukázka dvou homogenních oblastí, přičemž jedna je zatížená malým šumem.



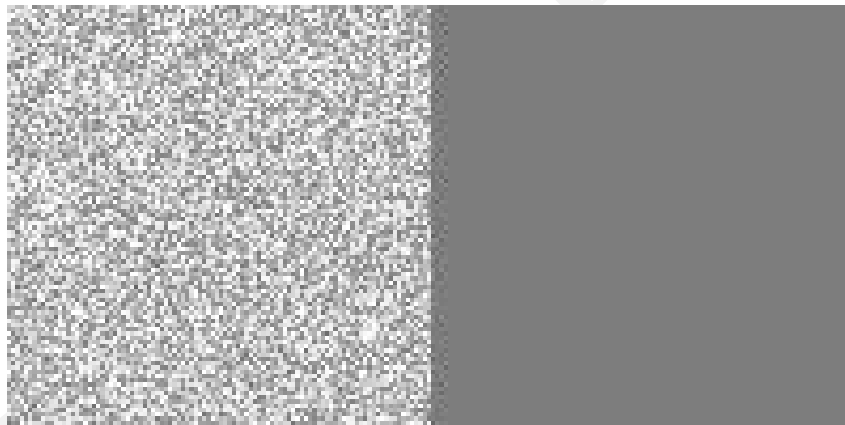
Obrázek 4: Ukázka obrázku s homogenními oblastmi, přičemž jedna je zašuměna.

Kvůli globálním charakteristikám ekvalizace, se algoritmus bude snažit roztáhnout jasy přes celé spektrum. Kvůli tomu je zvýrazněn šum. Nabízí se tedy použít adaptivní verzi algoritmu.

Adaptivní verze přináší několik problému. Prvním je jak zvolit velikost okolí každého pixelu. Díky velikosti tohoto okna vznikne gradientní přechod na rozmezí šedé a černé části obrázku. Šum je zvýrazněn taky, ovšem záleží opět na velikosti okénka. Černá se změní na bílou, kvůli vlastnostem zvoleného algoritmu. Histogram má sice požadované vlastnosti, ale z praktického hlediska není daná funkcionalita vhodná. Kvůli těmto problémům byl vyvinut algoritmus **Contrast Limited Adaptive Histogram Equalization**. U této metody se volí parametr limitace kontrastu. Pokud je v histogramu okolí pixelu detekován jas s větší hodnotou než je limit, tak se jeho hodnota sníží na limit. Hodnota nad limitem



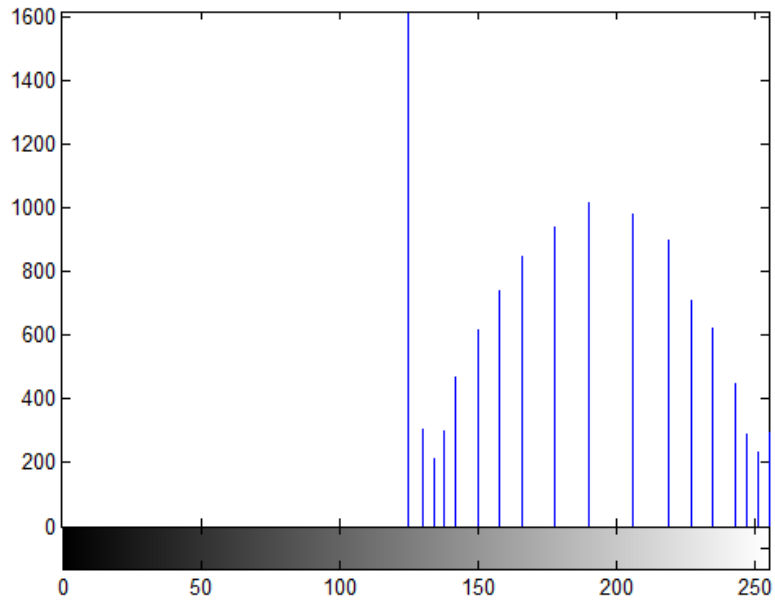
Obrázek 5: Histogram Obr. 4.



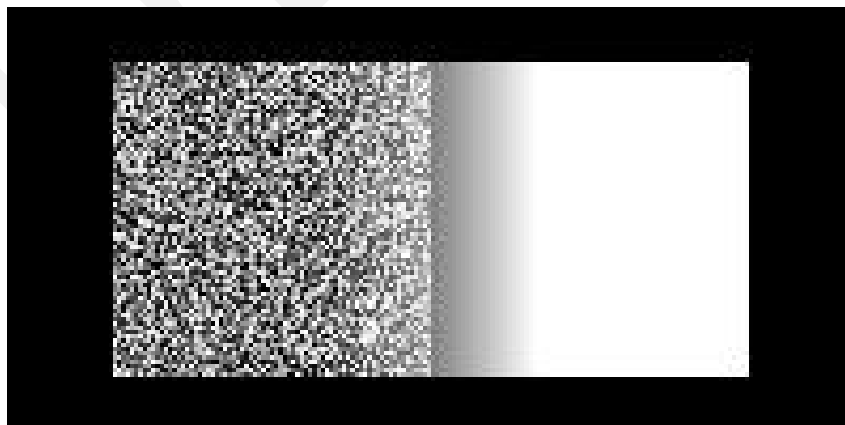
Obrázek 6: Ekválizace histogramu.

se rovnoměrně rozloží do ostatních částí histogramu. Limit se uvádí v relativním měřítku vůči celkovému počtu pixelů v obraze.

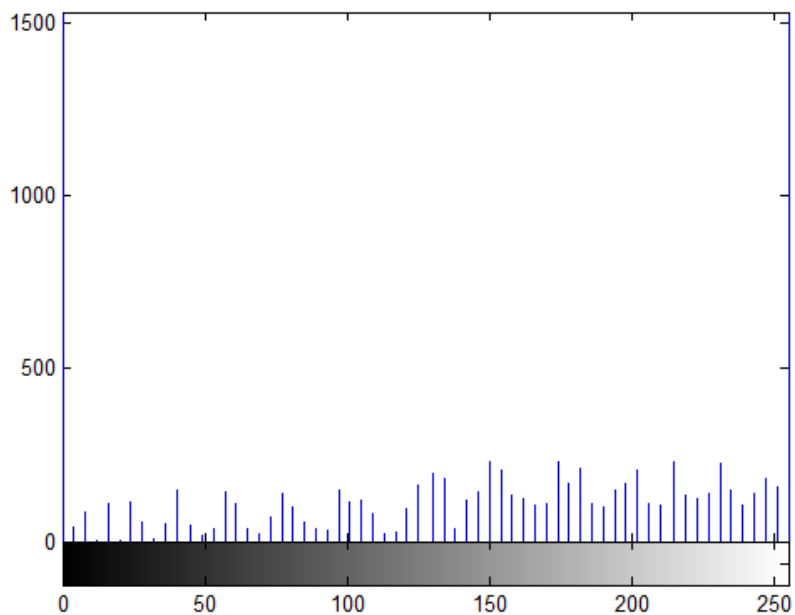
I když histogram neodpovídá uniformnímu rozložení, tak výsledky jsou uspokojivé a pro mnoho aplikací je toto nejlepší forma předzpracování obrazu.



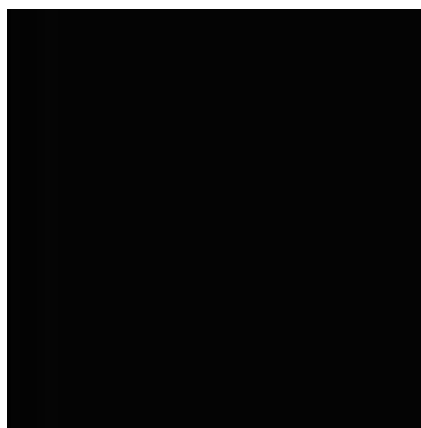
Obrázek 7: Histogram Obr. 6.



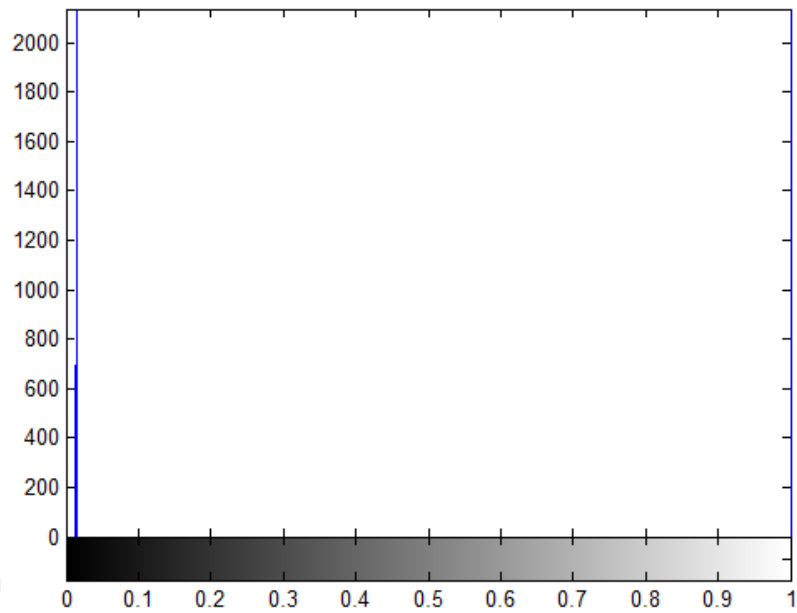
Obrázek 8: Adaptivní ekvalizace histogramu.



Obrázek 9: Histogram Obr. 10.



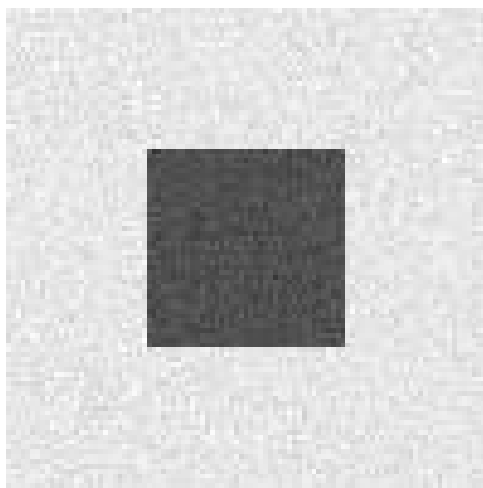
Obrázek 10: Adaptivní ekvalizace histogramu (CLAHE).



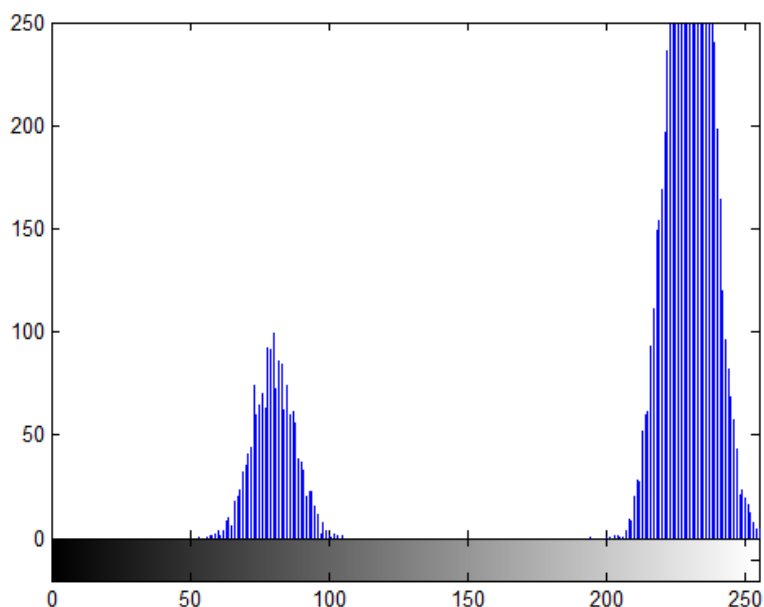
Obrázek 11: Histogram Obr. 10.

### 2 Vyhlazování histogramů

V různých aplikacích je častým krokem oddělení objektu zájmu od pozadí. Někdy může být úspěšné obyčejné prahování. Je to v případě, že objekt zájmu má jiné jasové charakteristiky jako pozadí. Ideální případ pak nastane pokud je histogram bimodální (viz. Obr 13).



Obrázek 12: Objekt pro segmentaci. Tmavá část je objekt zájmu, pozadí je světlé.



Obrázek 13: Bimodální histogram obrázku 15.

Definice bimodálnosti není jasně matematicky definovaná, ale jedná se o histogram se dvěma významnými vrcholy. Obecně může mít histogram (nebo rozdělení) jeden vrchol, pak je unimodální, nebo víc než dva, pak je multimodální. Hledání takového prahu, který oddělí popředí od pozadí, se může modifikovat na úlohu hledání vrcholů rozdělení. Vrchol



## 2 VYHLAZOVÁNÍ HISTOGRAMŮ

rozdělení může být definovaný jako lokální maximum histogramu. Představme si histogram jako spojitou funkci  $h(x)$ . V první řadě musíme najít extrémy funkce. Extrém funkce je v bodě, kde je derivace funkce rovna nule. Pro další zpracování je vhodné ponechat si lokace všech extrémů, hlavně nás však zajímají maxima. Maximum můžeme identifikovat díky druhé derivaci funkce. Pokud je v bodě lokální maximum, tak druhá derivace je záporná, jinak kladná.

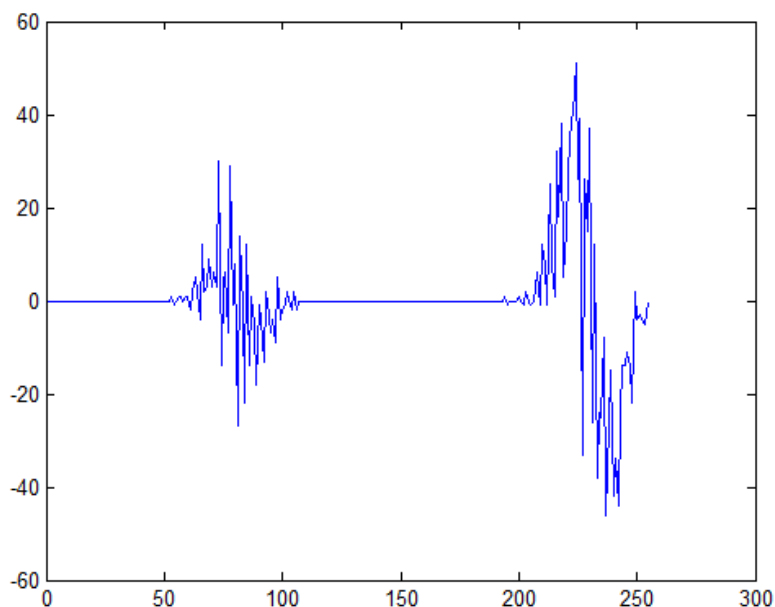
1. Ak  $h'(x) = 0$ , tak v  $x$  je extrém.
2. Ak  $h''(x) < 0$ , tak v  $x$  je lokální maximum.
3. Ak  $h''(x) > 0$ , tak v  $x$  je lokální minimum.

Práh můžeme volit mezi maximami, např jako střední hodnotu. Popřípadě můžeme zapojit další znalosti o lokálních minimech. Vrchol můžeme reprezentovat trojicí minimum-maximum-minimum. Práh můžeme tedy posunout směrem k užšímu vrcholu.

V praxi ovšem nemáme k dispozici funkční předpis histogramu, tudíž nemůžeme analyticky odvodit derivaci. Jedna možnost je derivaci odvodit pomocí diference. Můžeme psát

$$h'(x) \approx h(x) - h(x - 1) = \Delta h(x), \quad (2)$$

kde  $x$  je diskrétní. Při tomto přístupu nastává problém se šumem. Pokud by jsme použili výraz na histogram z Obr. 13 tak první derivace je zašumněna.



Obrázek 14: Difference bimodálního histogramu.

Kdybychom hledali druhou derivaci, tak si ji můžeme opět odvodit z diferencí.

$$h''(x) = (h'(x))' \approx \Delta^2 h = \Delta(\Delta h), \quad (3)$$

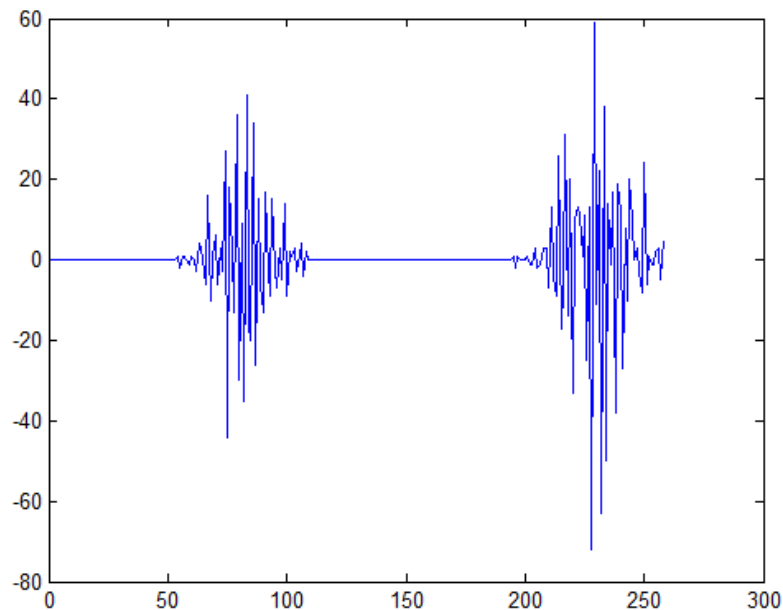
Po dosazení z rovnice 2 dostaneme

$$\Delta(\Delta h(x)) = \Delta(h(x) - h(x - 1)) = \Delta h(x) - \Delta h(x - 1), \quad (4)$$

dále můžeme psát

$$\Delta h(x) - \Delta h(x - 1) = [h(x) - h(x - 1)] - [h(x - 1) - h(x - 2)] = h(x) - 2h(x - 1) + h(x - 2), \quad (5)$$

a pokud použijeme danou rovnici na náš histogram, opět dostaneme zašuměnou druhou derivaci (diferenci).



Obrázek 15: Druhá difference bimodálního histogramu.

Jedna možnost jak šum potlačit, je vyhlazení signálu. K tomuto nám poslouží **konvoluce**.

## 3 Konvoluce

Konvoluce je matematická operace, která má na vstupu dvě funkce a na výstupu další funkci. Výsledná funkce popisuje v každém bodě obsah překryvu obou funkcí.

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau = (g * f)(t), \quad (6)$$

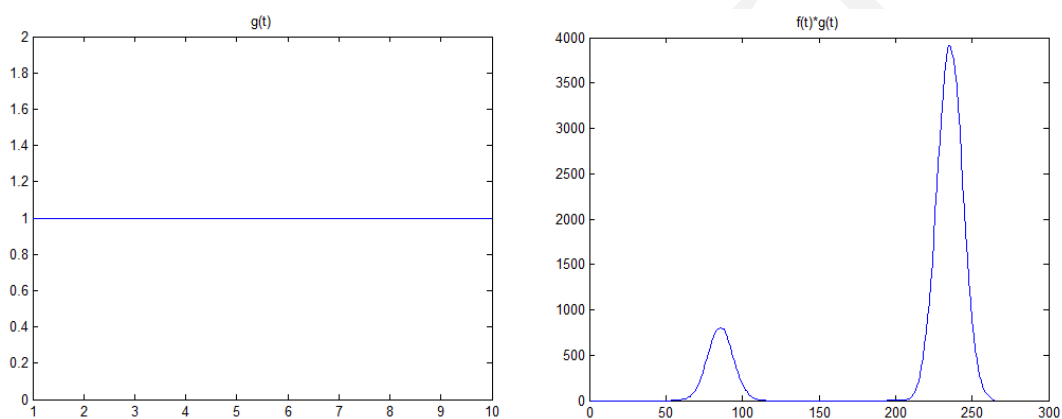
kde  $f$  nazveme signálem a  $g$  bude konvoluční jádro,  $t$  je bod, ve kterém se konvoluce počítá. Integrál počítáme v celém definičním oboru  $f$  a  $g$ , což obecně může být nekonečno. V úlohách počítačového vidění nemáme k dispozici spojité funkce, ale diskrétní signály. To změnilo integrály za sumy a můžeme psát

$$(f * g)[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m]g[n - m]. \quad (7)$$

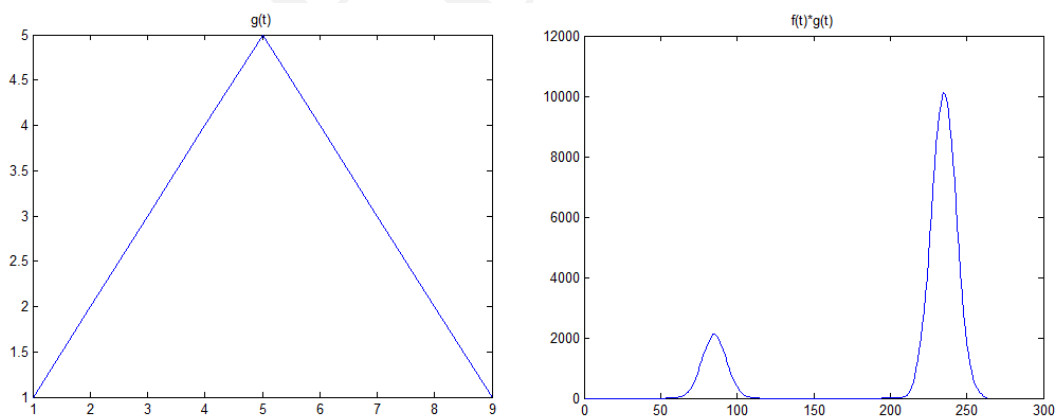
## 4 NON-MAXIMUM SUPPRESSION

Navíc uvažujeme, že signály jsou konečné a tudíž můžeme nekonečna změnit za konkrétní hodnoty. Většinou je jádro menší než signál, tudíž  $m$  může být v intervalech jádra.

Konvoluce má mnoho použití při zpracování signálů. V našem případě si ukážeme jak ji lze využít pro vyhlazení signálu. Protože nás zajímají polohy extrémů histogramů, můžeme použít pouze operace, které je nezmění. V případě konvoluce musíme použít symetrické jádro, které má maximumální hodnotu ve svém středu. Takovým jádrem může být i konstanta. Pak se jedná o lokální průměrování. Velikost jádra musí být pečlivě volena vzhledem k řešenému problému. V našem případě by neměla být větší než část hledaného vrcholu. Pokud suma (integrál) jádra je rovná jedné, tak se nezmění škála výsledku oproti vstupu. Na Obr. 16 je vidět konvoluce s konstantou a na Obr. 17 konvoluce s trojúhelníkovou funkcí.



Obrázek 16: Konvoluce s konstantou.



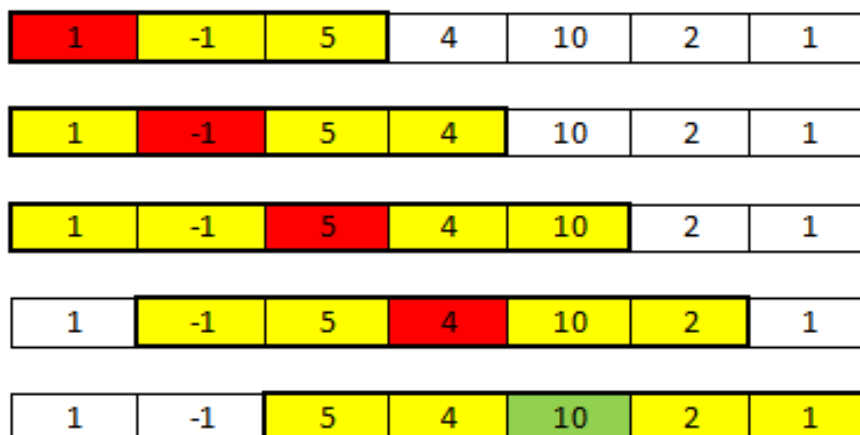
Obrázek 17: Konvoluce s trojúhelníkovou funkcí.

## 4 Non-maximum suppression

Potlačení nemaxim patří k rychlým a jednoduchým metodám jak detekovat maximum i v zašuměném signálu. Slouží také k odstranění lokálních extrémů v blízkosti těch globálních.

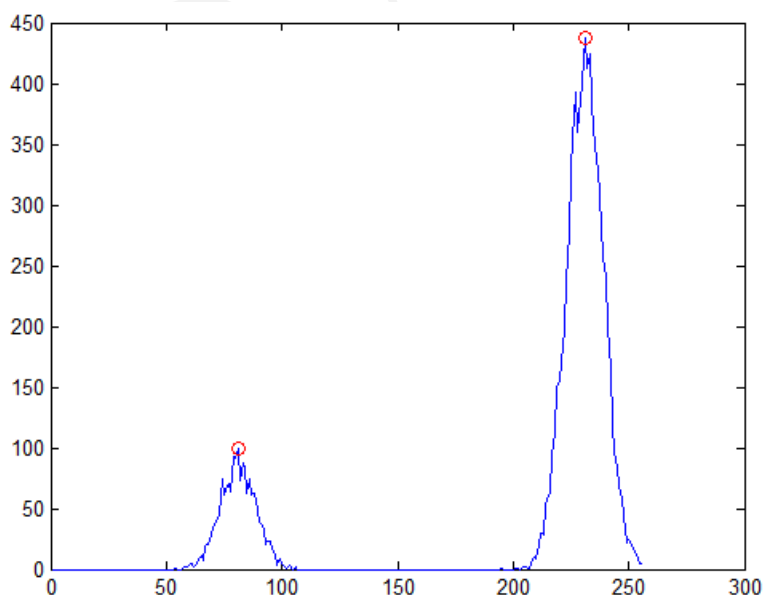
## 4 NON-MAXIMUM SUPPRESSION

Musíme si definovat velikost okna, které budeme používat. Analyzovaný bod bude ve středu okénka. Pokud je analyzovaný bod maximální v okénku, tak je označen jako lokální maximum.



Obrázek 18: Potlačení lokálních maxim. Žlutě je vyznačené analyzované okénko, červeně analyzované body, které nejsou maximem a zeleně analyzované body, které su maximem.

Obecně může být tato metoda použita na vícerozměrné data. Na Obr. 19 vidíme použití potlačení nemaxim na náš histogram. Šířka okna byla zvolena 11.



Obrázek 19: Detekce lokálních maxim pomocí metody potlačení nemaxim.

## 5 Otsuova metoda

Otsuova metoda slouží k automatickému prahování obrazu. Metoda předpokládá bimodální histogram. Tento předpoklad není nutný, ale jinak by výsledky nemuseli dávat smysl. Myšlenka (r. 1979) vznikla na základě chybějící definice kvality prahování histogramu. Jinými slovy neexistovalo žádné kritérium, které by určovalo, který práh je lepší. Otsu předpokládal, že nalezením tohoto kritéria vyřeší zároveň problém hledání optimálního řešení. Kvalitu prahování nazval jako "goodness".

### 5.1 Formulace úlohy

Definujeme si několik důležitých pojmů. Obraz obsahuje dvě třídy  $C_0$  a  $C_1$ . Obraz obsahuje  $L$  stupňů šedi  $\{1, 2, 3, \dots, L\}$ .  $C_0$  obsahuje stupně šedi  $\{1, \dots, k\}$  a  $C_1$  obsahuje stupně šedi  $\{k+1, \dots, L\}$ . Tudíž  $k$  je náš práh. Počet pixlů, které mají jas  $i$ , označíme  $n_i$ .  $N$  je celkový počet pixlů. Dále definujeme normalizovaný histogram tak, aby jsme s ním mohli pracovat jako s pravděpodobnostmi.

$$p_i = \frac{n_i}{N}, p_i \geq 0, \sum_{i=1}^L p_i = 1. \quad (8)$$

Pak můžeme definovat několik důležitých pojmů. Pravděpodobnost výskytu jednotlivých tříd bude,

$$\omega_0 = Pr(C_0) = \sum_{i=1}^k p_i = \omega(k) \quad (9)$$

$$\omega_1 = Pr(C_1) = \sum_{i=k+1}^L p_i = 1 - \omega(k) \quad (10)$$

a střední hodnoty

$$\mu_0 = \sum_{i=1}^k i Pr(i|C_0) = \sum_{i=1}^k i \frac{p_i}{\omega_0} = \sum_{i=1}^k \frac{i p_i}{\omega_0} = \frac{\mu(k)}{\omega(k)} \quad (11)$$

$$\mu_1 = \sum_{i=k+1}^L i Pr(i|C_1) = \sum_{i=k+1}^L i \frac{p_i}{\omega_1} = \sum_{i=k+1}^L \frac{i p_i}{\omega_1} = \frac{\mu_T - \mu(k)}{1 - \omega(k)}, \quad (12)$$

kde

$$\mu_T = \mu(L) = \sum_{i=1}^L i p_i \quad (13)$$

je celková střední hodnota obrazu. Pro jakékoliv  $k$ , můžeme dokázat, že

$$\omega_0 \mu_0 + \omega_1 \mu_1 = \mu_T, \omega_0 + \omega_1 = 1. \quad (14)$$

Rozptyly v jednotlivých třídách jsou dány

$$\sigma_0^2 = \sum_{i=1}^k (i - \mu_0)^2 Pr(i|C_0) = \sum_{i=1}^k (i - \mu_0)^2 p_i / \omega_0 \quad (15)$$

$$\sigma_1^2 = \sum_{i=k+1}^L (i - \mu_1)^2 Pr(i|C_1) = \sum_{i=k+1}^L (i - \mu_1)^2 p_i / \omega_1 \quad (16)$$

Potřebujeme nyní zavést kritérium, kterého optimalizací bychom získali nejlepší práh. Použijeme kritéria diskriminativní analýzy.

$$\lambda = \frac{\sigma_B^2}{\sigma_w^2}, \kappa = \frac{\sigma_T^2}{\sigma_w^2}, \eta = \frac{\sigma_B^2}{\sigma_T^2}, \quad (17)$$

kde

$$\sigma_w^2 = \omega_0 \sigma_0^2 + \omega_1 \sigma_1^2 \quad (18)$$

$$\sigma_B^2 = \omega_0 (\mu_0 - \mu_T)^2 + \omega_1 (\mu_1 - \mu_T)^2 = \omega_0 \omega_1 (\mu_1 - \mu_0)^2 \quad (19)$$

$$\sigma_T^2 = \sum_{i=1}^L (i - \mu_T)^2 p_i \quad (20)$$

a  $\sigma_w^2$  je rozptyl v třídách,  $\sigma_B^2$  je rozptyl mezi třídami a  $\sigma_T^2$  je celkový rozptyl jasně. Náš problém se redukuje na problém optimalizace kritérií definovaných v 17. Je vidět, že jednotlivé výrazy jsou vůči sobě ekvivalentní: např.  $\kappa = \lambda + 1$  a  $\eta = \lambda / (\lambda + 1)$  vrámci  $\lambda$ , protože platí:

$$\sigma_w^2 + \sigma_B^2 = \sigma_T^2. \quad (21)$$

Poznámky:  $\sigma_w^2$  a  $\sigma_B^2$  jsou závislé na práhu  $k$  a  $\sigma_T^2$  je na práhu nezávislá.  $\sigma_w^2$  je založena na statistikách druhého řádu, zatímco  $\sigma_B^2$  je založena na statistikách prvního řádu. Z těchto důvodů je  $\eta$  nejjednodušší míra kvality práhu. Optimální  $k^*$ , které maximalizuje  $\eta$  (nebo ekvivalentně maximalizuje  $\sigma_B^2$ ) lze najít pomocí sekvenčního prohledávání následující rovnice:

$$\sigma_B^2 = \frac{[\mu_T \omega(k) - \mu(k)]^2}{\omega(k)[1 - \omega(k)]}. \quad (22)$$

$k^*$  jako optimální práh se rovná

$$k^* = \arg \max_{1 \leq k < L} \sigma_B^2(k). \quad (23)$$

## 6 Gaussian Mixture Model

$$gmm = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathcal{N}_i(\mu_i; \mathbf{C}_i) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \left( \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^D |\mathbf{C}_i|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu_i)^T \mathbf{C}_i^{-1} (x - \mu_i)\right) \right), \quad (24)$$

kde  $N$  je počet komponent tvořící směs,  $\alpha_i$  je váha  $i$ -té komponenty a  $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$ ,  $\mu_i$  je střední hodnota  $i$ -té komponenty,  $\mathbf{C}_i$  je konvarianční matice  $i$ -té komponenty,  $|\cdot|$  je determinant a  $D$  je dimenze.

## 7 Zkouška

### 7.1 Adaptivní ekvalizace histogramu

#### 7.1.1 Co to je?

Metoda ekvalizace histogramu - úprava kontrastu obrazu.

#### 7.1.2 Na co to je?

Ekvalizace histogramu slouží ke zvýraznění detailů v obraze na základě transformace jasů. Adaptivní ekvalizace histogramu pracuje po částech obrazu, čímž se zamezí vlivu některých efektů (nerovnoměrné osvětlení).

### 7.2 CLAHE

#### 7.2.1 Co to je?

Metoda ekvalizace histogramu - úprava kontrastu obrazu. Clip Limited Adaptive Histogram Equalization.

#### 7.2.2 Na co to je?

Ekvalizace histogramu (viz. výše). Clip Limited znamená, že se použije parametr, který omezuje četnost jasů na požadovanou hodnotu. Tím se změní histogram (již neodpovídá obrázku) a transformace jasů se vypočítává na základě změněného histogramu.

### 7.3 Vyhlazování histogramů

#### 7.3.1 Co to je?

Metoda založená na filtraci signálů, která potlačuje šum.

#### 7.3.2 Na co to je?

Metoda umožní hledání maxim histogramů za použití odhadu derivací pomocí diferencí. Vrcholy histogramu můžeme pak kompaktně reprezentovat jako nalezené maxima. Mimo jiné nám to umožní automaticky určit práh pro prahování.

### 7.4 Otsuova metoda detekce prahu

#### 7.4.1 Co to je?

Metoda pro automatické určení prahu.

#### 7.4.2 Na co to je?

Umožňuje hledat práh za pomocí matematické optimalizace. Proto můžeme mluvit o optimálním prahu. Pak lze použít pro segmentaci obrazu dle jasu.

## Reference

DRAFT