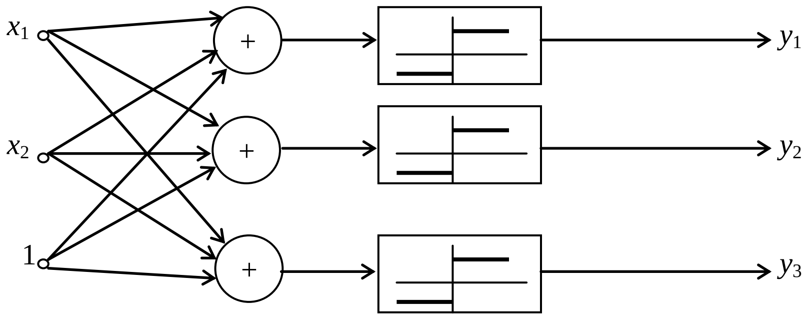
➢ ***Příklad:***

Natrénujte perceptronovou síť pomocí následující trénovací množiny:

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Řešení:

Ze zadání je zřejmé, že P=3 a že síť má následující strukturu:



$\boldsymbol{W}$ = ?, $\boldsymbol{b}$ = ?

Postup trénování:

- inicializace

$$\boldsymbol{W}(1) = \begin{bmatrix} 0,1 & -0,2 \\ 0 & -0,1 \\ 0,1 & 0,3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,2 \\ 0,1 \end{bmatrix}$$

$c = 1$; $k = 1$; $p = 1$; $q = 0$; $E(q) = 0$

- výpočet odezvy

$$\boldsymbol{x}(1) = \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}(1) = \left[\mathrm{sgn}\left(\boldsymbol{w}_1(1)\boldsymbol{x}(1) + \boldsymbol{b}_1(1)\right); \mathrm{sgn}\left(\boldsymbol{w}_2(1)\boldsymbol{x}(1) + \boldsymbol{b}_2(1)\right); \mathrm{sgn}\left(\boldsymbol{w}_3(1)\boldsymbol{x}(1) + \boldsymbol{b}_3(1)\right)\right]^{\mathrm{T}} =$$

$$= \left[\mathrm{sgn}\left(\begin{bmatrix} 0,1 & -0,2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} + 0\right); \mathrm{sgn}\left(\begin{bmatrix} 0 & -0,1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} + (-0,2)\right); \mathrm{sgn}\left(\begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} + 0,1\right)\right]^{\mathrm{T}} =$$

$$= \left[\mathrm{sgn}(0,6); \mathrm{sgn}(-0,4); \mathrm{sgn}(1,7)\right]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{u}(1) = \boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- výpočet chyby:

$$E(1) = E(0) + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{u}(1) - \boldsymbol{y}(1)\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{u}(1) - \boldsymbol{y}(1)\right) = 0 + \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)^{\mathrm{T}}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 2$$

- aktualizace vah a prahů:

$$\boldsymbol{W}(2)=\boldsymbol{W}(1)+\Delta\boldsymbol{W}(1)=\boldsymbol{W}(1)+c\left(\boldsymbol{u}(1)-\boldsymbol{y}(1)\right)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(1)=\begin{bmatrix}0,1 & -0,2\\ 0 & -0,1\\ 0,1 & 0,3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ -20 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,1 & -0,2\\ 0 & -0,1\\ -19,9 & -3,7\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}(2)=\boldsymbol{b}(1)+\Delta\boldsymbol{b}(1)=\boldsymbol{b}(1)+c\left(\boldsymbol{u}(1)-\boldsymbol{y}(1)\right)=\begin{bmatrix}0\\ -0,2\\ 0,1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -0,1\\ -1,9\end{bmatrix}$$

Poznámka: Vždy se mění jen váhy a prahy jen u toho neuronu, jehož výstup vychází špatně.

- test vyčerpanosti trénovací množiny
  Ještě nebyla vyčerpána celá trénovací množina $\Rightarrow$ $p = 2$; $k = 2$ (2. vektor z trénovací množiny)

- výpočet odezvy

$$\boldsymbol{x}(2)=\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}2\\ -5\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}(2)=\left[\mathrm{sgn}(1,2);\mathrm{sgn}(0,3);\mathrm{sgn}(-39,8+18,5-1,9)\right]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}(2)=\boldsymbol{u}_2=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$$

- výpočet chyby:

$$E(2)=E(1)+\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{u}(2)-\boldsymbol{y}(2)\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{u}(2)-\boldsymbol{y}(2)\right)=2+\frac{1}{2}4=4$$

- aktualizace vah a prahů:

$$\boldsymbol{W}(3)=\boldsymbol{W}(2)+\Delta\boldsymbol{W}(2)=\begin{bmatrix}0,1 & -0,2\\ 0 & -0,1\\ -19,9 & -3,7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & 10\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3,9 & 9,8\\ 0 & -0,1\\ -19,9 & -3,7\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}(3)=\boldsymbol{b}(2)+\Delta\boldsymbol{b}(2)=\begin{bmatrix}0\\ -0,2\\ -1,9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ -0,2\\ -1,9\end{bmatrix}$$

- test vyčerpanosti trénovací množiny:
  Ještě nebyla vyčerpána celá trénovací množina $\Rightarrow$ $p = 3$; $k = 3$ (3. vektor z trénovací množiny)

- výpočet odezvy:

$$\boldsymbol{x}(3)=\boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}-5\\ 5\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}(3)=\left[\mathrm{sgn}(66,5);\mathrm{sgn}(-0,7);\mathrm{sgn}(79,1)\right]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}(3) = \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- výpočet chyby:

$$E(3) = E(2) + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{u}(3) - \boldsymbol{y}(3)\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{u}(3) - \boldsymbol{y}(3)\right) = 4 + \frac{1}{2}4 = 6$$

$$\boldsymbol{W}(4) = \boldsymbol{W}(3) + \Delta\boldsymbol{W}(3) = \begin{bmatrix} 6{,}1 & -0{,}2 \\ 0 & -0{,}1 \\ -19{,}9 & -3{,}7 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}(4) = \boldsymbol{b}(3) + \Delta\boldsymbol{b}(3) = \begin{bmatrix} -4 \\ -0{,}2 \\ -1{,}9 \end{bmatrix}$$

- test vyčerpanosti trénovací množiny:
  Již byla vyčerpána celá trénovací množina $\Rightarrow$ $q = 1$

- konec trénovacího cyklu:
  $E_c(1) = E(3) = 6$
  Protože $E_c(1)$, položíme $E(3) = 0$, $k = 4$, $p = 1$ a vrátíme se na 2.krok

- výpočet odezvy

$$\boldsymbol{x}(4) = \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{y}(4) = \left[\operatorname{sgn}\left(\boldsymbol{w}_1(4)\boldsymbol{x}(4) + \boldsymbol{b}_1(4)\right); \operatorname{sgn}\left(\boldsymbol{w}_2(4)\boldsymbol{x}(4) + \boldsymbol{b}_2(4)\right); \operatorname{sgn}\left(\boldsymbol{w}_3(4)\boldsymbol{x}(4) + \boldsymbol{b}_3(4)\right)\right]^{\mathrm{T}} =$$

$$= \left[\operatorname{sgn}\left(\begin{bmatrix} 6{,}1 & -0{,}2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} + (-4)\right); \operatorname{sgn}\left(\begin{bmatrix} 0 & -0{,}1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} + (-0{,}2)\right); \operatorname{sgn}\left(\begin{bmatrix} -19{,}9 & -3{,}7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} + (-1{,}9)\right)\right]^{\mathrm{T}} =$$

$$= \left[\operatorname{sgn}(56{,}6); \operatorname{sgn}(-0{,}4); \operatorname{sgn}(-208{,}3)\right]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{u}(1) = \boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

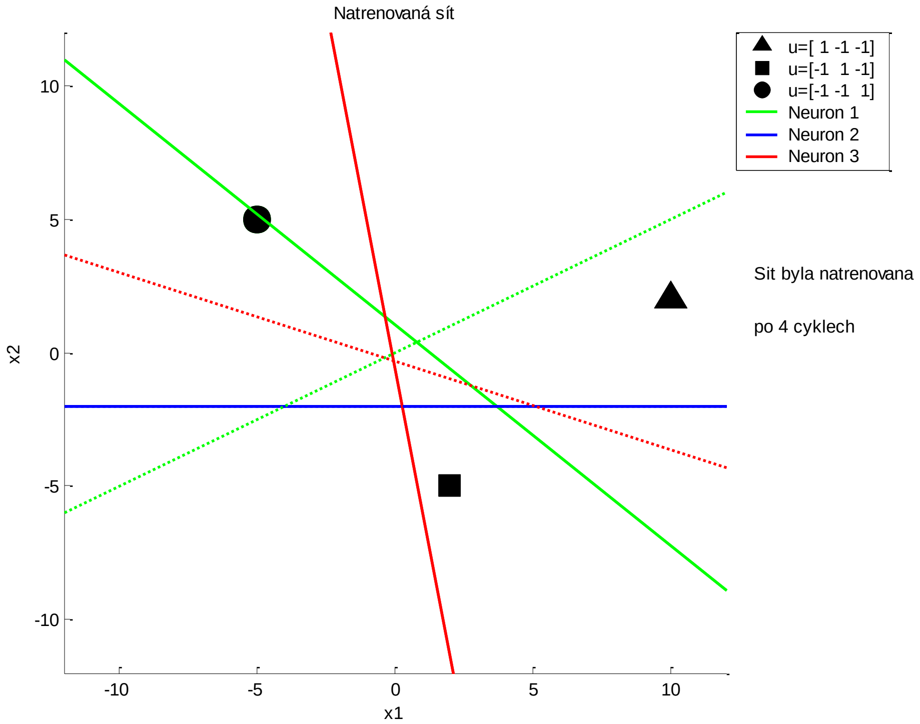
…. dále postupujeme jako dosud, tzn. postupně bereme jednotlivé dvojice z trénovací množiny a to tak dlouho, dokud chyba $E_c(q)$ není 0. To nastane po 4 cyklech, kdy vyjde

$$\boldsymbol{W}(13) = \boldsymbol{W}(12) + \Delta\boldsymbol{W}(12) = \begin{bmatrix} 8{,}1 & 9{,}8 \\ 0 & -0{,}1 \\ -19{,}9 & -3{,}7 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}(13) = \boldsymbol{b}(12) + \Delta\boldsymbol{b}(12) = \begin{bmatrix} -10 \\ -0{,}2 \\ -1{,}9 \end{bmatrix}$$

Grafická interpretace:

Pro dané váhy a prahy je každý neuron charakterizován přímkou, která dělí vstupní rovinu $x_1\,x_2$ na 2 poloroviny. Jedné přiřadí +1, druhé –1. V průběhu trénování pak dochází k otáčení a posunování přímek jednotlivých neuronů tak, aby odezva na vstupy z trénovací množiny byla správná. Na následujícím obrázku jsou čárkovaně znázorněny přímky reprezentující neurony po inicializaci, plnou čárou jsou přímky reprezentující neurony po natrénování.



≺ ***Konec příkladu***